512.0076
PH121L

NGUYỄN ANH TRƯỜNG - TRẦN VĂN THƯƠNG - NGUYỄN PHÚ KHÁNH
ĐẬU THANH KỲ - NGUYỄN MINH NHIÊN - NGUYỄN TẤT THU
NGUYỄN TẤN SIÊNG - ĐỖ NGỌC THỦY
(Nhóm giáo viên chuyên Toán THPT)

Phân loại
PHƯƠNG PHÁP GIẢI
ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH
11

(Tái bản có sửa chữa bổ sung)

- Dành cho học sinh lớp 11 ôn tập và nâng cao kiến thức
- Biên soạn theo nội dung sách giáo khoa của Bộ GD&ĐT

$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\left(\sqrt{\frac{x+x}{y}}\right)^2$

DVL.013478

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

512.0076
PH121L

NGUYỄN TẤN SIÊNG - ĐỖ NGỌC THỦY
(Nhóm giáo viên chuyên Toán THPT)

Phân loại
PHƯƠNG PHÁP GIẢI
ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH 11

(Tái bản có sửa chữa bổ sung)

- Dành cho học sinh lớp 11 ôn tập và nâng cao kiến thức
- Biên soạn theo nội dung sách giáo khoa của Bộ GD&ĐT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL / 13478 / 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

*"**Phân loại và phương pháp giải Đại số – Giải tích 11**" là một trong những cuốn thuộc bộ sách "**Phân loại và phương pháp giải theo chuyên đề: lớp 10, 11, 12**", do nhóm tác giả chuyên toán THPT biên soạn.*

Với cách viết khoa học và sinh động giúp bạn đọc tiếp cận với môn Toán một cách tự nhiên, không áp lực. Bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn, hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Tác giả chú trọng biên soạn những câu hỏi mở, nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi đại học, đồng thời phân bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay, đề thi đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó.

Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất. Vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này.

Giờ đây, chúng tôi chợt nhớ tới câu nói của Ludwig Van Beethoven: "Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm".

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Thay mặt nhóm biên soạn
Chủ biên: Nguyễn Phú Khánh

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn.

Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch vụ Văn hóa Khang Việt
71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao, Quận 1, TP. HCM
Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 39111968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880
Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Các hằng đẳng thức:

* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ với mọi α

* $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ với mọi $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$

* $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ với mọi $\alpha\neq k2\pi$

* $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ với mọi $\alpha\neq k\pi$

2. Hệ thức các cung đặc biệt

a. Hai cung đối nhau: α *và* $-\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

b. Hai cung phụ nhau: α *và* $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

c. Hai cung bù nhau: α *và* $\pi-\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

d. Hai cung hơn kém nhau $\pi:\alpha$ *và* $\pi+\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

3. Các công thức lượng giác

a. Công thức cộng

$\cos(a\pm b)=\cos a.\cos b\mp\sin a.\sin b$ $\qquad$ $\sin(a\pm b)=\sin a.\cos b\pm\cos a.\sin b$

$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\pm\tan a.\tan b}$

b. Công thức nhân

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ $\quad\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ $\quad\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

c. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

d. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)].$$

e. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin a-\sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a+\tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \qquad \tan a-\tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}.$$

II. TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có: $x \pm T \in D$ và $f(x+T) = f(x)$.

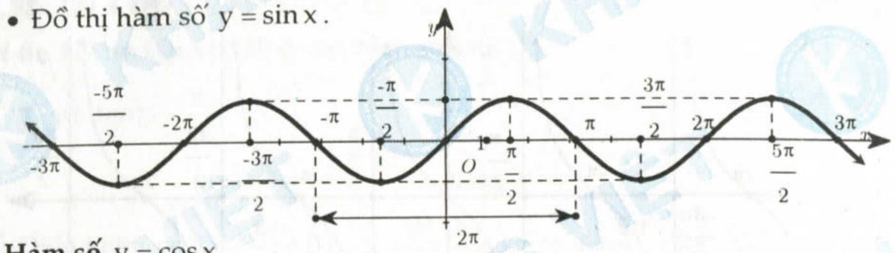
Nếu có số T ***dương nhỏ nhất*** thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là ***hàm số tuần hoàn với chu kì*** T.

III. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = R$
- Tập giác trị: $[-1;1]$, tức là $-1 \le \sin x \le 1 \ \forall x \in R$
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi)$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

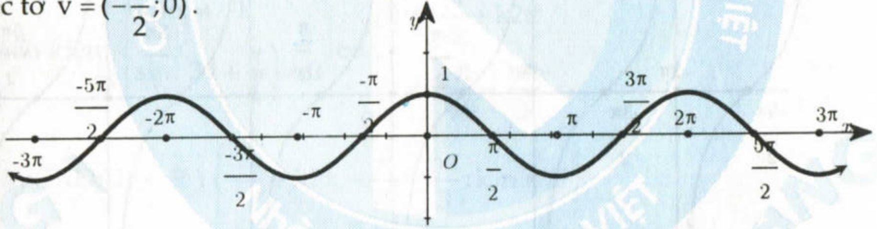
- Đồ thị hàm số $y = \sin x$.



2. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $D = R$
- Tập giác trị: $[-1;1]$, tức là $-1 \le \cos x \le 1 \ \forall x \in R$
- Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.
- Đồ thị hàm số $y = \cos x$.

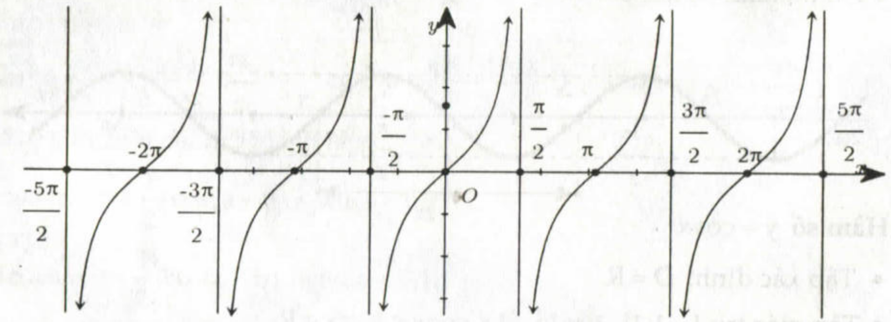
Đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo véc tơ $\vec{v} = (-\frac{\pi}{2};0)$.



3. Hàm số $y = \tan x$

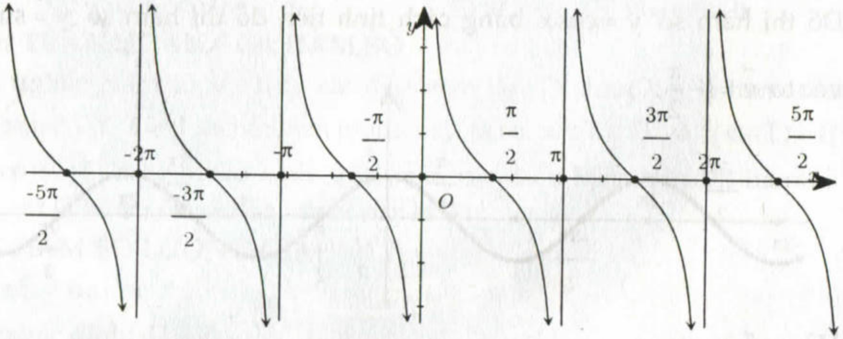
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$
- Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.

- Đồ thị



4. Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$
- Hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- Đồ thị



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

I. PHƯƠNG PHÁP

- Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \ge 0$ và $f(x)$ tồn tại
- Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \ne 0$ và $f(x)$ tồn tại.
- $\sin u(x) \ne 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos u(x) \ne 0 \Leftrightarrow u(x) \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $-1 \le \sin x,\ \cos x \le 1$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \tan(x - \frac{\pi}{6})$ 2. $y = \cot^2(\frac{2\pi}{3} - 3x)$

Giải

1. Điều kiện: $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \ne 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{2\pi}{3} + k\pi$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Điều kiện: $\sin(\frac{2\pi}{3} - 3x) \ne 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot(3x + \frac{\pi}{6})$ 2. $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3} \end{cases}$

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Ta có: $\sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 5x \ne 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ne 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \ne \frac{\pi}{2} + n2\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{14} + \frac{n2\pi}{7} \end{cases}$

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + n2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{2m\pi}{7}; k, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos 3x - 1}$ **2.** $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cot^2 x}{1 - \sin 3x}}$

Giải

1. Điều kiện: $\cos 3x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 3x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq k\pi \\ \sin 3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + n\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Vật TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n2\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \dfrac{1}{\sin 2x - \cos 3x}$ **2.** $y = \dfrac{\cot x}{2\sin x - 1}$

Giải

1. Điều kiện: $\sin 2x - \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{5x}{2}.\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{5x}{2} \neq 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \dfrac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{4\pi}{5} \\ x \neq k2\pi \end{cases}.$$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{4\pi}{5},\ k2\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq k\pi \\ \sin x - \dfrac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ \sin x - \sin\dfrac{\pi}{6} \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ 2\cos(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{12})\sin(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 8x - \sin 5x}$ **2.** $y = \dfrac{\tan 4x}{\cos 4x + \sin 3x}$

Giải

1. Điều kiện: $\sin 8x - \sin 5x \neq 0 \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{13x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{3x}{2} \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{13} + k\dfrac{2\pi}{13} \\ x \neq \dfrac{2n\pi}{3} \end{cases}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{13} + k\dfrac{2\pi}{13}, \dfrac{2n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$

2. Điều kiện: $\cos 4x + \sin 3x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 4x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \neq 0$

$$2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{14} + n\dfrac{4\pi}{7} \end{cases}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \dfrac{3\pi}{14} + n\dfrac{4\pi}{7}; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vấn đề 2. Tính chất của hàm số và đồ thị hàm số

I. Phương pháp

Cho hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì T

- * Để khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số, ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên một đoạn có độ dài bằng T sau đó ta tịnh tiến theo các véc tơ $k.\vec{v}$ (với $\vec{v} = (T;0)$, $k \in \mathbb{Z}$) ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.
- * Số nghiệm của phương trình $f(x) = k$, (với k là hằng số) chính bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = k$.
- * Nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là miền x mà đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm trên trục Ox.

Công ty TNHH MTV dịch vụ văn hóa Khang Việt – Nhà sách KHANG VIỆT

Chú ý:

- Hàm số $f(x)=a\sin ux+b\cos vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{|(u,v)|}$ ((u, v) là ước chung lớn nhất).
- Hàm số $f(x)=a.\tan ux+b.\cot vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{|(u,v)|}$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở của các hàm số: $f(x)=\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

Giải

Ta có $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)\Rightarrow$ hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở $T_0=2\pi$.

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở (nếu có) của các hàm số sau.

1. $f(x)=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$ 2. $f(x)=\sin x^2$

Giải

1. Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn $\Rightarrow$ có số thực dương T thỏa mãn

$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\cos(x+T)+\cos\sqrt{3}(x+T)=\cos x+\cos\sqrt{3}x$

Cho $x=0\Rightarrow\cos T+\cos\sqrt{3}T=2\Leftrightarrow\begin{cases}\cos T=1\\ \cos\sqrt{3}T=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}T=2n\pi\\ \sqrt{3}T=2m\pi\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{m}{n}$ vô lí, do $m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

2. Giả sử hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn

$\Rightarrow\exists T>0: f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)^2=\sin x^2\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Cho $x=0\Rightarrow\sin T^2=0\Leftrightarrow T^2=k\pi\Rightarrow T=\sqrt{k\pi}\ \Rightarrow f(x+\sqrt{k\pi})=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=\sqrt{2k\pi}$ ta có: $f(\sqrt{2k\pi})=\sin\left(\sqrt{k2\pi}\right)^2=\sin(k2\pi)=0$.

$f(x+\sqrt{k\pi})=\sin\left(\sqrt{k2\pi}+\sqrt{k\pi}\right)^2=\sin\left(3k\pi+2k\pi\sqrt{2}\right)=\pm\sin(2k\pi\sqrt{2})\Rightarrow f(x+\sqrt{k\pi})\neq0$.

Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số tuần hoàn.

Ví dụ 3. Cho a,b,c,d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=a\sin cx+b\cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Giải

* Giả sử f(x) là hàm số tuần hoàn $\Rightarrow\exists T>0: f(x+T)=f(x)\quad\forall x$

Cho $x=0,x=-T\Rightarrow\begin{cases}a\sin cT+b\cos dT=b\\ -a\sin cT+b\cos dT=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos dT=1\\ \sin cT=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}dT=2n\pi\\ cT=m\pi\end{cases}\Rightarrow\frac{c}{d}=\frac{m}{2n}\in\mathbb{Q}$.

* Giả sử $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists k,l\in\mathbb{Z}:\ \frac{c}{d}=\frac{k}{l}$. Đặt $T=\frac{2\pi k}{c}=\frac{2l\pi}{d}$

Ta có: $f(x+T)=f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi k}{c}=\frac{2l\pi}{d}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1,T_2. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x)\pm g(x);\ f(x).g(x)$ là những hàm số tuần hoàn.

Giải

Vì $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ nên tồn tại hai số nguyên $m,n;n\neq0$ sao cho:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}\Rightarrow nT_1=mT_2=T$$

Khi đó $f(x+T)=f(x+nT_1)=f(x)$ và $g(x+T)=g(x+mT_2)=g(x)$

Suy ra $f(x+T)\pm g(x+T)=f(x)\pm g(x)$ và $f(x+T).g(x+T)=f(x).g(x)$, $\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

* **Nhận xét:**

1. Hàm số $f(x)=a\sin ux+b\cos vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{(u,v)}$ ((u, v) là ước chung lớn nhất).

2. Hàm số $f(x)=a.\tan ux+b.\cot vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{(u,v)}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài tập. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở T_0.

1. $f(x)=\sin x,\quad T_0=2\pi$ **2.** $f(x)=\tan 2x,\quad T_0=\frac{\pi}{2}$.

Giải

1. Ta có $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Giả sử có số thực dương $T<2\pi$ thỏa mãn $f(x+T)=f(x)$

$\Leftrightarrow \sin(x+T)=\sin x\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad (1).$

Cho $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow VT(1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\cos T<1$

$VP(1)=\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow$ (1) không xảy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì cơ sở $T_0=2\pi$.

2. Ta có $f(x+\frac{\pi}{2})=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan(2x+\pi)=\tan 2x=f(x)$

Giả sử có số thực dương $T<\frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $f(x+T)=f(x)$

$\Leftrightarrow \tan(2x+2T)=\tan 2x\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad (2)$

Cho $x=0\Rightarrow VT(2)=\tan 2T\neq 0$, còn $VP(2)=0\Rightarrow$ (2) không xảy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì cơ sở $T_0=\frac{\pi}{2}$.

Vấn đề 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

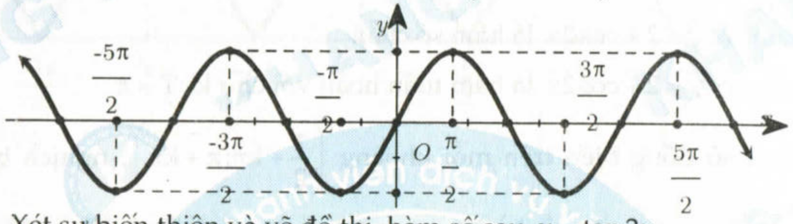
I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y=2\sin x$

Giải

Hàm số $y=2\sin x$

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$
- Hàm số $y=2\sin x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y=2\sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(k\pi;0)$, $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;2\right)$.

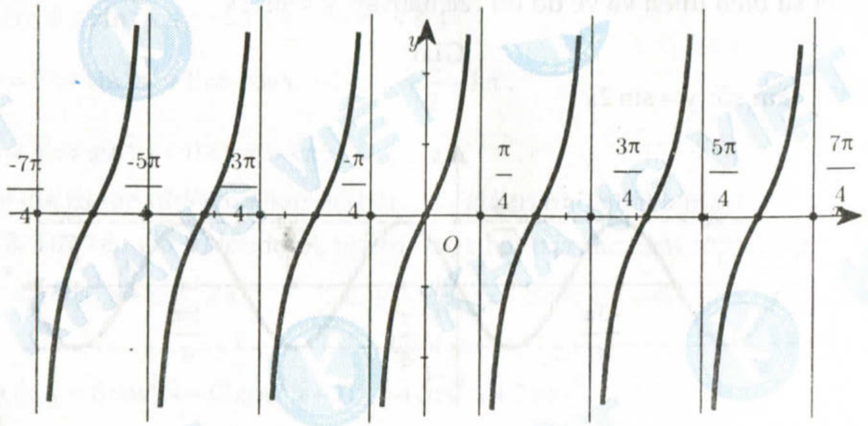


Ví dụ 2. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y=\tan 2x$

Giải

Hàm số $y=\tan 2x$

- TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Hàm số $y=\tan 2x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y=\tan 2x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{2}$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.
- Các đường tiệm cận: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(\frac{k\pi}{2};0)$.



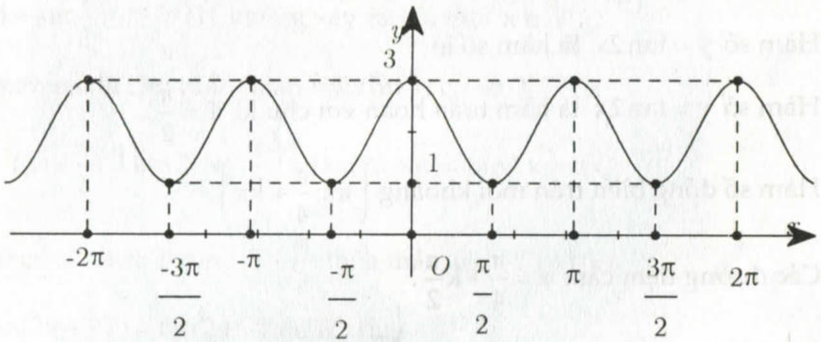
Ví dụ 2. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y = 1 + 2\cos^2 x$

Giải

Hàm số $y = 1 + 2\cos^2 x$

Ta có: $y = 2 + \cos 2x$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Hàm số $y = 2 + \cos 2x$ là hàm số chẵn
- Hàm số $y = 2 + \cos 2x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $\left(\frac{k\pi}{2}; 1\right)$, $(\pi + k\pi; 3)$.

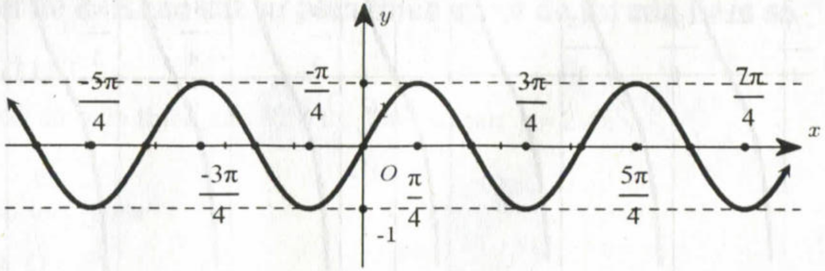


II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số $y = \sin 2x$

Giải

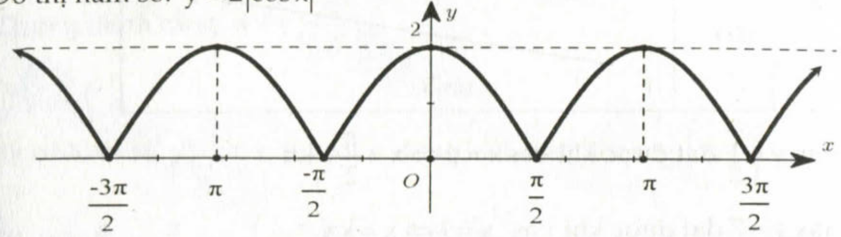
Đồ thị hàm số: $y = \sin 2x$



Bài 2. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số $y = 2|\cos x|$

Giải

Đồ thị hàm số: $y = 2|\cos x|$



Vấn đề 4. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 4\sin x\cos x + 1$ 2. $y = 4 - 3\sin^2 2x$

Giải

1. Ta có $y = 2\sin 2x + 1$.

Do $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin 2x \le 2 \Rightarrow -1 \le 2\sin 2x + 1 \le 3$

$\Rightarrow -1 \le y \le 3$.

* $y = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

* $y = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng −1.

2. Ta có: $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 1 \le 4 - 3\sin^2 x \le 4$

* $y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

* $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Ví dụ 2. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 6\cos^2 x + \cos^2 2x$ 2. $y = (4\sin x - 3\cos x)^2 - 4(4\sin x - 3\cos x) + 1$

Giải

1. Ta có: $y = 6\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 = 4\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1$

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow t\in[0;1]$. Khi đó $y=4t^2+2t+1=f(t)$

t	0		1
f(t)	1	$\nearrow$	7

Vậy $\min y = 1$ đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\max y = 7$ đạt được khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$

2. Đặt $t = 4\sin x - 3\cos x \Rightarrow -5\le t\le 5\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó: $y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

Vì $t\in[-5;5]\Rightarrow -7\le t-2\le 3\Rightarrow 0\le (t-2)^2\le 49$. Do đó $-3\le y\le 46$

Vậy $\min y=-3;\ \max y = 46$.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau chỉ nhận giá trị dương: $y=(3\sin x-4\cos x)^2-6\sin x+8\cos x+2m-1$

Giải

Đặt $t=3\sin x-4\cos x\Rightarrow -5\le t\le 5$

Ta có: $y=t^2-2t+2m-1=(t-1)^2+2m-2$

Do $-5\le t\le 5\Rightarrow 0\le (t-1)^2\le 36\Rightarrow y\ge 2m-2\Rightarrow \min y = 2m-2$

Hàm số chỉ nhận giá trị dương $\Leftrightarrow y>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \min y>0\Leftrightarrow 2m-2>0\Leftrightarrow m>1$.

Vậy $m>1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số $y=\sqrt{2\sin^2 x+4\sin x\cos x-(3+2m)\cos^2 x+2}$ xác định với mọi x.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x\Leftrightarrow 2\sin^2 x+4\sin x\cos x-(3+2m)\cos^2 x+2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

- $\cos x = 0\Rightarrow$ (1) đúng
- $\cos x\ne 0$ khi đó ta có: $(1)\Leftrightarrow 2\tan^2 x+4\tan x-(3+2m)+2(1+\tan^2 x)\ge 0$

$\Leftrightarrow 4\tan^2 x+4\tan x\ge 1+2m\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2\tan x+1)^2\ge 2+2m\quad\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2+2m\le 0\Leftrightarrow m\le -1$

Ví dụ 5. Cho các góc nhọn x, y thỏa mãn $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin(x+y)$ (*). Chứng minh rằng: $x+y=\frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Và $x, y, \frac{\pi}{2}-x, \frac{\pi}{2}-y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

- Giả sử $x+y>\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{\pi}{2}-y\\ y>\frac{\pi}{2}-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x>\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ \sin y>\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

Suy ra: $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y$

$>\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(x+y)$

Mâu thuẫn với (*)

- Giả sử $x+y<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{\pi}{2}-y\\ y<\frac{\pi}{2}-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x<\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ \sin y<\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

Suy ra: $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y$

$<\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(x+y)$

Mâu thuẫn với (*)

- Nếu $x+y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ (*) đúng. Vậy (*) $\Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 6. Tìm GTLN và GTNN của các hàm sau:

1. $y=3\sin x+4\cos x+5$

2. $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

Giải

1. Xét phương trình: $y=3\sin x+4\cos x+5$

$\Leftrightarrow 3\sin x+4\cos x+5-y=0\Rightarrow$ phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow 3^2+4^2\ge(5-y)^2\Leftrightarrow y^2-10y\le 0\Leftrightarrow 0\le y\le 10$

Vậy $\min y = 0$; $\max y = 10$.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

2. Do $\sin x+\cos x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$

Xét phương trình: $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

$\Leftrightarrow (1-y)\sin x+(2-y)\cos x+1-2y=0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1-y)^2+(2-y)^2\ge(1-2y)^2$

$\Leftrightarrow y^2+y-2\le 0\Leftrightarrow -2\le y\le 1$

Vậy $\min y=-2;\ \max y=1$.

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y=\sqrt{2\sin x+3}$ 2. $y=\dfrac{4}{1+2\sin^2 x}$

Giải

1. Ta có $1\le 2\sin x+3\le 5\Rightarrow 1\le y\le\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{5}$, đạt được khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Giá trị nhỏ nhất bằng 1, đạt được khi $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

2. Ta có: $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow\dfrac{4}{3}\le y\le 4$

- $y=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\min y=\dfrac{4}{3}$
- $y=4\Leftrightarrow\sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi\Rightarrow\max y=4$.

Bài 2. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y=2\sin^2 x+\cos^2 2x$ 2. $y=3\sin x+4\cos x+1$

Giải

1. Đặt $t=\sin^2 x,\ 0\le t\le 1\Rightarrow\cos 2x=1-2t$

$\Rightarrow y=2t+(1-2t)^2=4t^2-2t+1=(2t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$.

Do $0\le t\le 1\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le 2t-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow 0\le(2t-\dfrac{1}{2})^2\le\dfrac{9}{4}\Rightarrow\dfrac{3}{4}\le y\le 3$.

Vậy $\max y=3$ đạt được khi $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

$\min y=\dfrac{3}{4}$ đạt được khi $\sin^2 x=\dfrac{1}{4}$.

2. Áp dụng BĐT $(ac+bd)^2\le(c^2+d^2)(a^2+b^2)$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Ta có: $(3\sin x+4\cos x)^2\le(3^2+4^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)=25$

$\Rightarrow -5\le 3\sin x+4\cos x\le 5\Rightarrow -4\le y\le 6$.

Vậy $\max y=6$, đạt được khi $\tan x=\dfrac{3}{4}$.

$\min y=-4$, đạt được khi $\tan x=-\dfrac{3}{4}$.

Chú ý: Với cách làm tương tự ta có được kết quả tổng quát sau:

$\max(a\sin x+b\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}$, $\min(a\sin x+b\cos x)=-\sqrt{a^2+b^2}$

Tức là: $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$.

Bài 3. Chứng minh đẳng thức sau: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

Trong đó $\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ và a, b không đồng thời bằng 0.

Giải

Do a, b không đồng thời bằng 0 nên $\sqrt{a^2+b^2}\ne 0$

Suy ra: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

Vì $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên tồn tại số thức $\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ sao cho:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

Khi đó: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$.

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a\sin x+b\cos x$ bằng $-\sqrt{a^2+b^2}$
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y=a\sin x+b\cos x$ bằng $\sqrt{a^2+b^2}$
- $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$ 2. $y=\tan^2 x+\cot^2 x+3(\tan x+\cot x)-1$.

Giải

1. Ta có $y \ge 0\ \forall x$ và $y^2 = 2 + 2\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$

Mà $2\left|\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}\right| \le \sin^2 x + 2 - \sin^2 x = 2$

Suy ra $0 \le y^2 \le 4 \Rightarrow 0 \le y \le 2$

$\min y = 0$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\max y = 2$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

2. Ta có: $y = (\tan x + \cot x)^2 + 3(\tan x + \cot x) - 3$

Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow |t| \ge 2$

Suy ra $y = t^2 + 3t - 3 = f(t)$. Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f(t)		↘	-5	▨	▨	↗	

Vậy $\min y = -5$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Không tồn tại $\max y$.

Bài 5. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{5\sin 4x - 6\cos 4x + 2m - 1}$ xác định với mọi x.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \Leftrightarrow 5\sin 4x - 6\cos 4x \ge 1 - 2m\ \ \forall x$

Do $\min(5\sin 4x - 6\cos 4x) = -\sqrt{61} \Rightarrow -\sqrt{61} \ge 1 - 2m \Leftrightarrow m \ge \frac{\sqrt{61}+1}{2}$.

Bài 6. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = \frac{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}{2\sin 2x - \cos 2x + 4}$ **2.** $y = \frac{2\sin^2 3x + 4\sin 3x\cos 3x + 1}{\sin 6x + 4\cos 6x + 10}$

3. $y = \frac{\sin^2 2x + 3\sin 4x}{2\cos^2 2x - \sin 4x + 2}$ **4.** $y = 3(3\sin x + 4\cos x)^2 + 4(3\sin x + 4\cos x) + 1$

Giải

1. Ta có: $2\sin 2x - \cos 2x + 4 \ge 4 - \sqrt{5} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}{2\sin 2x - \cos 2x + 4} \Leftrightarrow (2y-1)\sin 2x - (y+2)\cos 2x = 3 - 4y$

$\Rightarrow (2y-1)^2 + (y+2)^2 \ge (3-4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \le y \le 2$

Suy ra: $\min y = \frac{2}{11}$; $\max y = 2$.

2. Ta có: $\sin 6x + 4\cos 6x + 10 \ge 10 - \sqrt{17} > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{2\sin 6x - \cos 6x + 2}{\sin 6x + 4\cos 6x + 10} \Leftrightarrow (y-2)\sin 6x + (4y+1)\cos 6x = 2 - 10y$

$\Rightarrow (y-2)^2 + (4y+1)^2 \ge (2-10y)^2 \Leftrightarrow 83y^2 - 44y - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{22-9\sqrt{7}}{83} \le y \le \frac{22+9\sqrt{7}}{83}$

Suy ra: $\min y = \frac{22-9\sqrt{7}}{83}$; $\max y = \frac{22+9\sqrt{7}}{83}$.

3. Ta có $y = \frac{6\sin 4x - \cos 4x + 1}{2\cos 4x - 2\sin 4x + 6}$ (do $\cos 4x - \sin 4x + 3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (6+2y)\sin 4x - (1+2y)\cos 4x = 6y - 1$

$\Rightarrow (6+2y)^2 + (1+2y)^2 \ge (6y-1)^2 \Leftrightarrow 8y^2 - 10y - 9 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{97}}{8} \le y \le \frac{5+\sqrt{97}}{8}$

Vậy $\min y = \frac{5-\sqrt{97}}{8}$, $\max y = \frac{5+\sqrt{97}}{8}$.

4. Đặt $t = 3\sin x + 4\cos x \Rightarrow t \in [-5;5]$

Khi đó: $y = 3t^2 + 4t + 1 = f(t)$ với $t \in [-5;5]$

Do $\min y = f(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$; $\max y = f(5) = 96$.

Bài 7. Tìm m để các bất phương trình sau đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

1. $\frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4\cos^2 x + 1} \le m + 1$ **2.** $\frac{4\sin 2x + \cos 2x + 17}{3\cos 2x + \sin 2x + m + 1} \ge 2$.

Giải

1. Đặt $y = \frac{3\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2\cos 2x + 3}$

(Do $\sin 2x + 2\cos 2x + 3 > 0\ \forall x \Rightarrow$ hàm số xác định trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow (3-y)\sin 2x + (1-2y)\cos 2x = 3y$

Suy ra $(3-y)^2 + (1-2y)^2 \ge 9y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 5y - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{-5-3\sqrt{5}}{4} \le y \le \frac{-5+3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \max y = \frac{-5+3\sqrt{5}}{4}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{-5+3\sqrt{5}}{4} \le m + 1 \Leftrightarrow m \ge \frac{3\sqrt{5}-9}{4}$.

2. Trước hết ta có: $3\cos 2x+\sin 2x+m+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3^2+1^2<(m+1)^2 \Leftrightarrow m^2+2m-9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1-\sqrt{10}\\ m>-1+\sqrt{10}\end{array}\right.\quad (*)$$

- $m>-1+\sqrt{10}\Rightarrow 3\cos 2x+\sin 2x+m+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên $\dfrac{4\sin 2x+\cos 2x+17}{3\cos 2x+\sin 2x+m+1}\ge 2 \Leftrightarrow 2\sin 2x-5\cos 2x\ge 2m-15$

$\Leftrightarrow -\sqrt{29}\ge 2m-15 \Leftrightarrow m\le \dfrac{15-\sqrt{29}}{2}$

Suy ra: $\sqrt{10}-1<m\le\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}$

- $m<-1-\sqrt{10}\Rightarrow 3\cos 2x+\sin 2x+m+1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nên $\dfrac{4\sin 2x+\cos 2x+17}{3\cos 2x+\sin 2x+m+1}\ge 2 \Leftrightarrow 2\sin 2x-5\cos 2x\le 2m-15$

$\Leftrightarrow \sqrt{29}\le 2m-15 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{15+\sqrt{29}}{2}$ (loại)

Vậy $\sqrt{10}-1<m\le\dfrac{15-\sqrt{29}}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 8. Cho $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{\sin^4 x}{y}+\dfrac{\cos^4 y}{x}$.

Giải

Ta có: $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2\Leftrightarrow \sin^2 x+\sin^2 y=\sin(x+y)$

Suy ra: $x+y=\dfrac{\pi}{2}$. Áp dụng bđt: $\dfrac{a^2}{m}+\dfrac{b^2}{n}\ge\dfrac{(a+b)^2}{m+n}$.

Suy ra: $P\ge\dfrac{(\sin^2 x+\sin^2 y)^2}{x+y}=\dfrac{2}{\pi}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó: $\min P=\dfrac{2}{\pi}$.

CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình: $\sin x=m$ (1)

* Nếu: $|m|>1\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

* Nếu: $|m|\le 1\Rightarrow \exists\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha=m$

$$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi\\ x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu α thỏa mãn $\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\\ \sin\alpha=m\end{array}\right.$ thì ta viết $\alpha=\arcsin m$.

* Các trường hợp đặc biệt:

1. $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ 2. $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

3. $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$

2. Phương trình: $\cos x=m$ (2)

* Nếu: $|m|>1\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* Nếu: $|m|\le 1\Rightarrow \exists\alpha\in[0;\pi]:\cos\alpha=m$

$$\Rightarrow (2)\Leftrightarrow \cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi\\ x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu α thỏa mãn $\left\{\begin{array}{l} 0\le-\alpha\le\pi\\ \cos\alpha=m\end{array}\right.$ thì ta viết $\alpha=\arccos m$.

* Các trường hợp đặc biệt:

1. $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$ 2. $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$

3. $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

3. Phương trình: $\tan x=m$ (3)

Với $\forall m\Rightarrow\exists\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right):\tan\alpha=m$

$\Rightarrow (3)\Leftrightarrow \tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$.

Chú ý: * Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arctan m$.

* Các trường hợp đặc biệt:

1. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ *2.* $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

3. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

4. Phương trình: $\cot x = m$ (4)

Với $\forall m \Rightarrow \exists \alpha \in (-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}) : \cot\alpha = m$

$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$.

Chú ý: * Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} m$.

* Các trường hợp đặc biệt:

1. $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ *2.* $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

3. $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Ghi chú:

$*\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{matrix}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$*\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$*\ \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u, v \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (k,n \in \mathbb{Z}).$

$*\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u, v \neq n\pi \end{cases} \quad (k,n \in \mathbb{Z}).$

II. DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

Là phương trình có dạng: $a\sin x + b\cos x = c$ (1) ; với $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.

Cách giải: Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ và đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2).

Chú ý:

- (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.
- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left[\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right] = 2\sin(x - \dfrac{\pi}{3})$
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \dfrac{1}{2}\cos x\right] = 2\sin(x \pm \dfrac{\pi}{6})$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right] = \sqrt{2}\sin(x \pm \dfrac{\pi}{4})$.

III. DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CHỨA MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Là phương trình có dạng: $a\left[\begin{matrix}\sin u(x) \\ \cos u(x) \\ \tan u(x) \\ \cot u(x)\end{matrix}\right]^2 + b\left[\begin{matrix}\sin u(x) \\ \cos u(x) \\ \tan u(x) \\ \cot u(x)\end{matrix}\right] + c = 0$

Cách giải: Đặt $t = \left[\begin{matrix}\sin u(x) \\ \cos u(x) \\ \tan u(x) \\ \cot u(x)\end{matrix}\right.$ ta có phương trình: $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình này ta tìm được t, từ đó tìm được x

Khi đặt $t = \left[\begin{matrix}\sin u(x) \\ \cos u(x)\end{matrix}\right.$, ta có điều kiện: $t \in [-1;1]$.

IV. DẠNG 4: PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó luỹ thừa của sinx và cosx cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\cos^k x \neq 0$ (k là số mũ cao nhất) ta được phương trình ẩn là $\tan x$.

V. DẠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG (PHẢN ĐỐI XỨNG) ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

Là phương trình có dạng: $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$ (3)

Để giải phương trình trên ta sử dụng phép đặt ẩn phụ:

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{2} = \sin x\cos x \\ t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \end{cases}$$

Thay vào (5) ta được phương trình bậc hai theo t.

Ngoài ra chúng ta còn gặp phương trình phản đối xứng có dạng

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0\quad(3')$$

Để giải phương trình này ta cũng đặt:

$$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}\end{cases}$$

Thay vào (3′) ta có được phương trình bậc hai theo t.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

1. $\sin x-\cos 2x=0$ 2. $\cos^2 x-\sin 2x=0$

3. $2\sin(2x-35^0)=\sqrt{3}$ 4. $\sin(2x+1)+\cos(3x-1)=0$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow\cos 2x=\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Phương trình $\cos^2 x-2\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow\cos x(\cos x-2\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\sin x=\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

3. Phương trình $\Leftrightarrow\sin(2x-35^0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-35^0=60^0+k360^0\\ 2x-35^0=180^0-60^0+k360^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{95^0}{2}+k.180^0\\ x=\dfrac{155^0}{2}+k.180^0\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\Leftrightarrow\cos(3x-1)=\sin(-2x-1)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x+1\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=\dfrac{\pi}{2}+2x+1+k2\pi\\ 3x-1=-\dfrac{\pi}{2}-2x-1+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{2\pi}{5}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^3 x\sin 3x-\cos^3 x\cos 3x=-\dfrac{5}{2}$
2. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$
3. $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$
4. $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$

Giải

1. Ta có $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4};\cos^3 x=\dfrac{\cos 3x+3\cos x}{4}$

Nên phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 3x\left(3\sin x-\sin 3x\right)-\cos 3x\left(\cos 3x+3\cos x\right)=-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sin 3x\sin x-\cos 3x\cos x\right)-1=-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3\cos 4x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=\cos 2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. Áp dụng công thức hạ bậc, ta có:

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos 6x}{2}-\dfrac{1+\cos 8x}{2}=\dfrac{1-\cos 10x}{2}-\dfrac{1+\cos 12x}{2}$

$$\Leftrightarrow\cos 6x+\cos 8x=\cos 10x+\cos 12x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x=2\cos 11x\cos x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 11x=\cos 7x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\dfrac{\pi}{2};\ x=k\dfrac{\pi}{9}.\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\Leftrightarrow (1+\cos 6x)\cos 2x - 1 - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

* ***Nhận xét:***

– Ở $\cos 6x.\cos 2x - 1 = 0$ ta có thể sử dụng công thức nhân ba, thay $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$ và chuyển về phương trình trùng phương đối với hàm số lượng giác $\cos 2x$.

– Ta cũng có thể sử dụng các công thức nhân ngay từ đầu, chuyển phương trình đã cho về phương trình chỉ chứa cosx và đặt $t = \cos^2 x$.

Tuy nhiên cách được trình bày ở trên là đẹp hơn cả vì chúng ta chỉ sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tích thành tổng.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

1. $3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

2. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

1. $\cos(\pi \sin x) = \cos(3\pi \sin x)$ 2. $\tan\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + 1)\right] = 1$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\pi\sin x = \pi\sin x + k2\pi \\ 3\pi\sin x = -\pi\sin x + n2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = k \\ \sin x = \frac{n}{2} \end{array}\right.$

- Xét phương trình $\sin x = k$. Do $k \in \mathbb{Z}$ và $-1 \le \sin x \le 1$ nên ta có các giá trị của $k: -1, 0, 1$

Từ đó ta có các nghiệm: $x = m\pi, x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$.

- Xét phương trình $\sin x = \frac{n}{2}$. Ta có các giá trị của n là: $n = \pm 2, n = \pm 1, n = 0$

Từ đó ta tìm được các nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, x = l\pi, x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = m\pi, x = \frac{\pi}{2} + m\pi, x = \pm\frac{\pi}{6} + m\pi\ ,\ m \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\sin x + 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow \sin x + 1 = 1 + 4k \Leftrightarrow \sin x = 4k \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

1. $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x = 4\sin 2x$ 2. $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Giải

1. Phương trình đã cho tương đương với

$3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 5\tan^2 x - 8\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ hoặc $\tan x = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \arctan\frac{3}{5} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left[1 - \cos(x - \frac{\pi}{2})\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$ 2. $2\cos^3 x = \sin 3x$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 x - \sin x\cos^2 x + \cos x.\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (Do $\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$)

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x + 2\cos^3 x - 3\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x\cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 3\tan x + 2 = 0$ (do $\cos x = 0$ không là nghiệm của hệ)

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$ 2. $\sin^2 x - 3\sin x.\cos x = -1$

Giải

1. Nhận thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x - 5\tan x - 6 = 0 \overset{t=\tan x}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 6 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x.\cos x = -(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\cos x\sin x + \cos^2 x = 0$

Do $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0 \overset{t=\tan x}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau:

1. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ 2. $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$.

Giải

1. Ta thấy trong phương trình chứa ba cung $x, 2x, 3x$ nên ta tìm cách đưa về cùng một cung x.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + (2\cos^2 x - 1) - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.

Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$.

Ta có: $2t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1, t = -\frac{1}{2}$.

* $t = \pm 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

* $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý: Ta có thể giải bài toán trên theo cách sau:

Phương trình $\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x - (1 - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x\sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

2. Ta chuyển cung $2x$ về cung x.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

1. $4\left(\cos 3x\cos^3 x + \sin 3x\sin^3 x\right) + \sqrt{3}\sin 6x = 1 + 3\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)$

2. $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sin 4x\left(\sqrt{3} - 1 - \tan 2x\tan x\right) = 3$

Giải

1. Ta có: $4\left(\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x\right)=3\cos 2x+\cos 6x$ và $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$ nên

Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos 2x+\cos 6x+\sqrt{3}\sin 6x=1+3\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 6x=1-\cos 6x \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x=2\sin^2 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x\right)=0$.

Suy ra nghiệm cần tìm là $x=k\frac{\pi}{3}; x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

2. Điều kiện $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$.

Ta có: $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=4-2\sin^2 2x=3+\cos 4x$

$$1+\tan 2x\tan x=1+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}=\frac{\cos\left(2x-x\right)}{\cos 2x\cos x}=\frac{1}{\cos 2x}.$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3+\cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x-\frac{\sin 4x}{\cos 2x}=3$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=2\sin 2x \Leftrightarrow \sin(4x+\frac{\pi}{6})=\sin 2x$.

Từ đó ta tìm được nghiệm thỏa mãn phương trình là:

$$x=-\frac{\pi}{12}+k\pi;\ x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10. Chứng minh rằng hàm số sau chỉ nhận giá trị dương:

$$y=\sin^2 x-14\sin x.\cos x-5\cos^2 x+3.\sqrt[3]{33}$$

Giải

- Nếu $\cos x=0 \Rightarrow y=1+3.\sqrt[3]{33}>0$
- Với $\cos x\neq 0$ ta có: $y=\dfrac{(1+3\sqrt[3]{33})\tan^2 x-14\tan x+3\sqrt[3]{33}-5}{\cos^2 x}$

Vì $\Delta=7^2-(1+3.\sqrt[3]{33})(3.\sqrt[3]{33}-5)<0$

Suy ra $(1+3\sqrt[3]{33})\tan^2 x-14\tan x+3\sqrt[3]{33}-5>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 11.

1. Cho $\tan\alpha, \tan\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-6x-2=0$. Tính giá trị của biểu thức sau $P=\sin^2(\alpha+\beta)-5\sin(2\alpha+2\beta)-2.\cos^2(\alpha+\beta)$.

2. Cho $\tan\alpha, \tan\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+bx+c=0$ $(c\neq 1)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a.\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(2\alpha+2\beta)+c.\cos^2(\alpha+\beta)$ theo a,b,c.

Giải

1. Theo định lí Viét ta có: $\tan\alpha+\tan\beta=6,\ \tan\alpha.\tan\beta=-2$

Suy ra $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=2$.

Ta có: $P(1+\tan^2(\alpha+\beta))=\dfrac{P}{\cos^2(\alpha+\beta)}=\tan^2(\alpha+\beta)-10\tan(\alpha+\beta)-2$

$$\Rightarrow P=\frac{\tan^2(\alpha+\beta)-10\tan(\alpha+\beta)-2}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{4-20-2}{1+4}=-\frac{18}{5}.$$

2. Theo định lí Viét ta có: $\tan\alpha+\tan\beta=-b, \tan\alpha.\tan\beta=c$.

Suy ra $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{-b}{1-c}$.

Ta có: $P(1+\tan^2(\alpha+\beta))=\dfrac{P}{\cos^2(\alpha+\beta)}=a\tan^2(\alpha+\beta)+2b\tan(\alpha+\beta)+c$

$$\Rightarrow P=\frac{a\tan^2(\alpha+\beta)+2b\tan(\alpha+\beta)+c}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{a.\frac{b^2}{(1-c)^2}-\frac{2b^2}{1-c}+c}{1+\frac{b^2}{(1-c)^2}}=\frac{ab^2-2b^2(1-c)+c(1-c)^2}{(1-c)^2+b^2}.$$

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1. $\cos\left(3x+15^0\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x+\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \cos(3x+15^0)=\cos 30^0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x+15^0=30^0+k.360^0\\ 3x+15^0=-30^0+k.360^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5^0+k.120^0\\ x=-15^0+k.120^0\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\frac{1}{2}=\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi \\ 4x+\frac{1}{2}=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{3}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1. $\sin 2x-2\cos 2x=0$
2. $\tan 2x=\tan x$.

Giải

1. Phương trình $\sin 2x=2\cos 2x \Leftrightarrow \tan 2x=2$

$\Leftrightarrow 2x=\arctan 2+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\arctan 2+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x+k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1. $\cos^2 x-\sin 2x=0$
2. $\sin(4x-\frac{\pi}{4})+\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0$
3. $\cos 7x+\sin(2x-\frac{\pi}{5})=0$
4. $6\sin 4x+5\sin 8x=0$.

Giải

1. Phương trình $\cos^2 x-2\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ 2\sin x=\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \tan x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\arctan\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}-2x+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{72}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{11\pi}{24}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

3. Phương trình $\Leftrightarrow \cos 7x=\sin\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{10}+2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x=\frac{3\pi}{10}+2x+k2\pi \\ 7x=-\frac{3\pi}{10}-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{50}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=-\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x(3+5\cos 4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k\pi}{4} \\ x=\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{k\pi}{2}. \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1. $\cot 2x.\sin 3x=0$
2. $\cot 5x.\cot 8x=1$
3. $\sqrt{4-x^2}\sin 2x=0$
4. $\tan^2 x+\cot^2 x=1+\cos^2(3x+\frac{\pi}{4})$

Giải

1. Điều kiện: $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x=0 \\ \sin 3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{k\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:

$$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, x=\frac{m\pi}{3} \text{ với } m\neq 3n.$$

2. Điều kiện: $\begin{cases} \sin 5x\neq 0 \\ \sin 8x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\frac{k\pi}{5} \\ x\neq\frac{k\pi}{8} \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \cot 8x=\tan 5x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-5x\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{26}+m\frac{\pi}{13}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{26}+\frac{m\pi}{13}, m\neq 13n+6$.

3. Điều kiện: $-2\le x\le 2$

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ \sin 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình: $x=\pm 2, x=\pm\frac{\pi}{2}, x=0$.

4. Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$. Ta có: $\tan^2 x + \cot^2 x \geq 2 \geq 1 + \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

Nên phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \cot^2 x \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + m\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

1. $\cos(\frac{2\pi}{3}\sin x - \frac{2\pi}{3}) = 1$ 2. $\cot\left[\frac{\pi}{4}(\cos x - 1)\right] = -1$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\sin x - \frac{2\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow \sin x = 1 + 3k$

Do $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\cos x - 1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow \cos x = 4k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 7x) = \sin 7x - \cos 2x$ 2. $\frac{\cos x - 2\sin x.\cos x}{2\cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sin 7x - \sqrt{3}\cos 7x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} - k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện: $2\cos^2 x + \sin x - 1 \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x - \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 7 Giải các phương trình sau:

1. $\sin 2x + 4(\sin x - \cos x) = 4$ 2. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

3. $\cos^3 x - \sin^3 x = -1$.

Giải

1. Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow 2\sin x\cos x = 1 - t^2$.

Thay vào phương trình ta được: $1 - t^2 + 4t = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right..$$

2. Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$

Đặt $t = \sin x + \cos x, t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Thay vào phương trình ta có được:

$(t^2 - 1)t = \sqrt{2} \Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

3. Phương trình $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x) + 1 = 0$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Thay vào phương trình ta được: $t\left(1 + \frac{1 - t^2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right..$$

Bài 8 Giải các phương trình sau:

1. $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 5$ 2. $\cos 4x = \cos^2 3x$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 5\tan^2 x + 2\tan x - 5 = 0$.

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-1 \pm \sqrt{26}}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{-1 \pm \sqrt{26}}{5} + k\pi$

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos 4x = 1 + \cos 6x \Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos^2 2x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

1. $2\cos^2 x + 6\sin x\cos x + 6\sin^2 x = 1$ **2.** $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + 2\cos^2 x$

3. $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

Giải

1. Phương trình: $\cos^2 x + 6\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow 5\tan^2 x + 6\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}(\tan x + 1) = 3(1 + \tan^2 x) + 2$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\sqrt{2}\tan x + 5 - 2\sqrt{2} = 0$ vô nghiệm

3. Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin 2x} = \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow 1 + \cot^2 2x = 1 + \cot 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x = 0 \\ \cot 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$ **2.** $4\sin x + 3\cos x + \dfrac{6}{4\sin x + 3\cos x + 1} = 6$

3. $\dfrac{\cos x - 2\sin x.\cos x}{2\cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$ **4.** $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{24} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{24} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

2. Phương trình $\Leftrightarrow (4\sin x + 3\cos x)^2 + 5(4\sin x + 3\cos x) + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin x + 3\cos x = -3 \\ 4\sin x + 3\cos x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x + \alpha) = -\dfrac{3}{5} \\ \sin(x + \alpha) = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \text{ với } \alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right): \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \alpha - \arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right) + k2\pi \end{array}\right. \text{ và } \left[\begin{array}{l} x = -\alpha + \arcsin\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \alpha - \arcsin\left(-\dfrac{2}{5}\right) + k2\pi \end{array}\right..$$

3. Điều kiện: $2\cos^2 x + \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\Leftrightarrow 4\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = -1 \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

1. $2\sin 2x - (\sin x + \cos x) + 1 = 0$ **2.** $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin x$

3. $|\cos x - \sin x| + 2\sin 2x = 1$ **4.** $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} + \sin x + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{10}{3}$.

Giải

1. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |t| \leq \sqrt{2} \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{array}\right.$

Ta có: $2(t^2 - 1) - t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -\dfrac{1}{2}$

- $t = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Điều kiên: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |t| \leq \sqrt{2} \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{array}\right.$

Ta có: $t=\sqrt{2}\left(t^2-1\right)\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}, t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Từ đó tìm được: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi,\ x=-\frac{5\pi}{12}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

3. Đặt $t=|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=1-t^2\\ 0\le t\le\sqrt{2}\end{cases}$

Ta có: $t+2(1-t^2)=1\Leftrightarrow 2t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{10}{3}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}|t|\le\sqrt{2}\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

Ta có: $t+\frac{2t}{t^2-1}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3t(t^2-1)+6t=10(t^2-1)\quad (t\ne\pm1)$

$\Leftrightarrow 3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t-5)=0\Leftrightarrow t=\frac{2-\sqrt{19}}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 12. Giải các phương trình sau:

1. $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$
2. $2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+2\cos^2 x$
3. $2\cos^3 x=\sin 3x$
4. $4\sin^3 x+3\cos^3 x-3\sin x-\sin^2 x\cos x=0$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Vì $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\tan x+1\right)=3(1+\tan^2 x)+2$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x-2\sqrt{2}\tan x+5-2\sqrt{2}=0$ phương trình vô nghiệm.

3. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^3 x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\Leftrightarrow 2=3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x\Leftrightarrow \tan^3 x-3\tan x+2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-2\\ \tan x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arctan(-2)+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Ta thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình

Nên phương trình $\Leftrightarrow 4\tan^3 x+3-3\tan x(1+\tan^2 x)-\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 13. Giải các phương trình sau:

1. $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$
2. $3\cos 4x-\sin^2 2x+\cos 2x-2=0$

Giải

1. Đặt $t=\sin x,\ t\in[-1;1]$, ta có phương trình: $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow t=1; t=\frac{1}{2}$.

- $t=1\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Phương trình đã cho tương đương với:

$3(2\cos^2 2x-1)-(1-\cos^2 2x)+\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow 7\cos^2 2x+\cos 2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=\frac{6}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\arccos\frac{6}{7}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 14. Giai các phương trình sau:

1. $4\cos x.\cos 2x+1=0$
2. $16(\sin^8 x+\cos^8 x)=17\cos^2 2x$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos x(2\cos^2 x-1)+1=0$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 x-4\cos x+1=0\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x+2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ 4\cos^2 x+2\cos x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{8}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Ta có $\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$.

Nên đặt $t=\sin^2 2x,\ 0\le t\le 1$ ta được phương trình:

$$16\left(1-\frac{1}{2}t\right)^2-2t^2=17(1-t)\Leftrightarrow 2t^2+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x=0\Leftrightarrow \cos 4x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

1. $2\tan^2 x+3=\dfrac{3}{\cos x}$ 2. $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$

3. $2\cos^2\dfrac{3x}{5}+1=3\cos\dfrac{4x}{5}$ 4. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)+\sin 2x.$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)+3=\dfrac{3}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{\cos^2 x}-3\frac{1}{\cos x}+1=0\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x=1+2\sin x\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x-1-2\sin x=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\Leftrightarrow 2+\cos\dfrac{6x}{5}=3\cos\dfrac{4x}{5}$

$$\Leftrightarrow 2+4\cos^3\frac{2x}{5}-3\cos\frac{2x}{5}=3\left(2\cos^2\frac{2x}{5}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{2x}{5}-6\cos^2\frac{2x}{5}-3\cos\frac{2x}{5}+5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{2x}{5}-1\right)\left(4\cos^2\frac{2x}{5}-2\cos\frac{2x}{5}-5\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k5\pi\\ x=\pm\dfrac{5}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}+k5\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

4. Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\sin(x+\dfrac{\pi}{3})\ne 0\\ \sin(\dfrac{\pi}{6}-x)\ne 0\end{array}\right.$

Do $\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=1$

Phương trình $\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1+\sin 2x\Leftrightarrow \sin 2x=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 16. Giải các phương trình sau:

1. $1+3\tan x=2\sin 2x$ 2. $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$

Giải

1. Điều kiện: $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\dfrac{\sin x}{\cos x}=4\sin x\cos x\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$.

Đây là phương trình đẳng cấp bậc ba nên ta chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ (do $\cos x\ne 0$), ta được phương trình:

$$\frac{1}{\cos^2 x}+3\frac{\tan x}{\cos^2 x}=4\tan x\Leftrightarrow 1+\tan^2 x+3\tan x(1+\tan^2 x)=4\tan x$$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ thỏa mãn điều kiện.

* **Nhận xét**: Để giải phương trình này ngay từ đầu ta có thể chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ hoặc sử dụng công thức:

$\sin 2x=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ và chuyển phương trình ban đầu về phương trình chỉ chứa hàm tan như trên.

2. Điều kiện: $\sin 2x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\dfrac{\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}+4\sin 2x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+4\sin 2x.\sin x\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\sin^2 2x-1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\dfrac{1}{2}$ (do $\sin 2x\ne 0\Leftrightarrow \cos 2x\ne\pm 1$) $\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

***Chú ý*:**

Ta cần lưu ý đến công thức: $\tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}$ và $\cot x-\tan x=2\cot 2x$.

Bài 17. Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{1-2\sqrt{2}(\sin 2x+\cos 2x)}{\sin 4x}=6\tan^2(x-\dfrac{\pi}{8})$

2. $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$

3. $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$.

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases}\sin 4x\neq 0\\ \cos(x-\dfrac{\pi}{8})\neq 0\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{1-4\cos(2x-\dfrac{\pi}{4})}{\sin 4x}=6\tan^2(x-\dfrac{\pi}{8})$

Đặt $t=x-\dfrac{\pi}{8}$ ta có: $\dfrac{1-4\cos 2t}{\sin(\dfrac{\pi}{2}+4t)}=6\tan^2 t\Leftrightarrow\dfrac{1-4\cos 2t}{\cos 4t}=6\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$

$\Leftrightarrow(1-4\cos 2t)(1+\cos 2t)=6(1-\cos 2t)(2\cos^2 2t-1)$

$\Leftrightarrow 12\cos^3 2t-16\cos^2 2t-9\cos 2t+7=0\Leftrightarrow(2\cos 2t-1)(6\cos^2 2t-5\cos 2t-7)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2t=\dfrac{1}{2}\\ 6\cos^2 2t-5\cos 2t-7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2t=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2t=\dfrac{5-\sqrt{193}}{12}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ t=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{5-\sqrt{193}}{12}+k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{5-\sqrt{193}}{12}+k\pi\end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình

2. Điều kiện: $x\neq k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{3\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$.

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x-3\sqrt{2}\sin^2 x.\cos x+2\sqrt{2}\sin^4 x-2\sin^2 x\cos x=0$

$\Leftrightarrow(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x-2\sin^2 x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0\\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

3. $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-1+2\sin^2 x-7\sin x-2\cos x+4=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0$

$$\Leftrightarrow(2\sin x-1)(2\cos x+\sin x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ 2\cos x+\sin x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

(***Lưu ý***: $|a\sin x+b\cos x|\leq\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow 2\cos x+\sin x\leq\sqrt{5}<3$).

Bài 18. Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\cot 2x-\dfrac{1}{8\sin 2x}$

2. $\cot x+\tan x=\sin x+\cos x$

3. $3\sin x+2\cos x=2+3\tan x$

4. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$

Giải

1. Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

Nên phương trình có dạng $2-\sin^2 x=5\cos 2x-\dfrac{5}{8}$

Hay $4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0$, suy ra $\cos 2x=\dfrac{9}{2}$ (loại), $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

Vậy $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

2. Điều kiện: $\sin x\neq 0,\cos x\neq 0$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\cos x-\sin x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \cos x-\sin x\cos x-\sin x=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin^2 x+\cos^2 x+2\cos x-2\sin x-2\sin x\cos x+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \left(\cos x-\sin x+1-\sqrt{2}\right)\left(\cos x-\sin x+1+\sqrt{2}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \left[\begin{array}{l}\left(\cos x-\sin x+1-\sqrt{2}\right)=0\\ \left(\cos x-\sin x+1+\sqrt{2}\right)=0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+2k\pi\\ x=\dfrac{5}{4}\pi+\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+2k\pi\end{array}\right.\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

3. Điều kiện: $\cos x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow\ 3\sin x+2\cos x=\dfrac{2\cos x+3\sin x}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow(3\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\sin x+\cos x=0\\ 1-\dfrac{1}{\cos x}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-\dfrac{1}{3}\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right)+k\pi\\ x=2k\pi\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

4. Đặt: $x=\dfrac{4}{15}\pi+u$. Khi đó phương trình trở thành: $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{u}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{u}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)=0\Leftrightarrow u=2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{4}{15}\pi=2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{4}{15}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 19. Giải các phương trình sau:

1. $2\cos x+\tan x=1+2\sin 2x$

2. $\cos x-2\cos 3x=1+\sqrt{3}.\sin x$

3. $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 4x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

4. $\left(\dfrac{\cos 4x+\sin 2x}{\cos 3x+\sin 3x}\right)^2=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

Giải

1. $2\cos x+\tan x=1+2\sin 2x$

Điều kiện: $\cos x\neq 0$

Chỉ đó phương trình $\Leftrightarrow 2\cos x+\dfrac{\sin x}{\cos x}=1+4\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sin x=\cos x+4\sin x\cos^2 x\Leftrightarrow\cos x\left(2\cos x-1\right)=\sin x\left(4\cos^2 x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)\left(\cos x-\sin x\left(2\cos x+1\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\ \sin x-\cos x+2\sin x\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \left(\cos x-\sin x\right)^2+\left(\cos x-\sin x\right)-1=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \cos x-\sin x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\arccos x\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\\ x=\arccos x\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\right)-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\end{array}\right.\end{array}\right.$$

2. $\cos x-2\cos 3x=1+\sqrt{3}.\sin x$

Phương trình $\Leftrightarrow\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x+1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1+2\cos 3x$

Với $t=x+\dfrac{\pi}{3}$ thì phương trình trở thành:

$2\cos t=1-2\cos 3t\Leftrightarrow 2\cos t+2\cos 3t=1$

Với $u=\cos u$ thì ta có: $2u+2\left(4u^3-3u\right)=1\Leftrightarrow\left(2u+1\right)\left(4u^2-2u-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-\dfrac{1}{2} \\ u=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi \\ \left[\begin{array}{l} t=\pm\dfrac{3}{5}\pi+2k\pi \\ t=\pm\dfrac{1}{5}\pi+2k\pi \end{array}\right. \end{array}\right. ;k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho:

$$x=\pi+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=\frac{4}{5}\pi+2k\pi,\ x=-\frac{14}{15}\pi+2k\pi, \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{15}\pi+2k\pi \\ x=-\dfrac{8}{15}\pi+2k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

3. $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 4x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 4x-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)=0 \\ \cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}k\pi \\ x=\pi+\dfrac{2}{3}k\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. $\left(\dfrac{\cos 4x+\sin 2x}{\cos 3x+\sin 3x}\right)^2=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

Điều kiện: $\cos 3x+\sin 3x\neq 0$

Ta có: $\cos 4x+\sin 2x=\cos 4x+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\cos 3x+\sin 3x=\cos 3x+\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Khi đó phương trình trở thành: $2\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 20. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^3 x.\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\dfrac{-3}{4}$

2. $2\sin 2x+(2\sqrt{3}-3)\sin x+(2-3\sqrt{3})\cos x=6-\sqrt{3}$

3. $\dfrac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$

4. $\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2\left(1+\sin^2 2x\right)$

Giải

1 Áp dụng công thức hạ bậc ta có:

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x\right)\cos 3x+\left(\dfrac{3}{4}\cos x+\dfrac{1}{4}\cos 3x\right)\sin 3x=-\dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 4x=-1$$

Vậy ta có được $x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x+\left(2\sqrt{3}-3\right)\sin x+\left(2-3\sqrt{3}\right)\cos x=6-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+2\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-3\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=6-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=6-\sqrt{3}$$

Đặt $x=t+\dfrac{7\pi}{6}$. Ta có: $2\sin\left(2t+\dfrac{7}{3}\pi\right)+4\sin\left(t+\dfrac{8}{6}\pi\right)-6\sin\left(t+\dfrac{9\pi}{6}\right)=6-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t-2\sin t-2\sqrt{3}\cos t+6\cos t-6+\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2t-2\sin t+6(\cos t-1)+\sqrt{3}\left(\cos 2t-2\cos t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\left(\cos t-1\right)+6\left(\cos t-1\right)+\sqrt{3}\left(2\cos^2 t-2\cos t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos t-1\right)\left(2\sin t+2\sqrt{3}\cos t+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t=1 \\ \sin t+\sqrt{3}\cos t=-3\ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow t=k2\pi$$

Suy ra nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$.

3. Điều kiện: $4\cos^2 2x+\sin^2 2x\neq 0\ \forall x$.

Ta có: $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\left(4-3\sin^2 2x\right)$

Suy ra $\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}=\frac{1}{4}$. Nên phương trình $\Leftrightarrow \sin^{10} x+\cos^{10} x=1$ (*)

Do $\begin{cases}0\le\sin^2 x\le 1\\ 0\le\cos^2 x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^{10} x\le\sin^2 x\\ \cos^{10} x\le\cos^2 x\end{cases}\Rightarrow \sin^{10} x+\cos^{10} x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Nên phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^{10} x=\sin^2 x\\ \cos^{10} x=\cos^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Áp dụng bđt $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$ ta có:

$\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}\le\sqrt{2\left(\cos^2 3x+2-\cos^2 3x\right)}=2$

Mà $2\left(1+\sin^2 2x\right)\ge 2$ nên phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 3x=\sqrt{2-\cos^2 3x}\\ \sin 2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 3x=1\\ \sin x\cos x=0\end{cases}$ (*)

Vì $\cos x=0\Rightarrow\cos 3x=0$; $\sin x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\Rightarrow\cos 3x=1\\ \cos x=-1\Rightarrow\cos 3x=-1\end{array}\right.$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 21. Giải các phương trình sau:

1. $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$

2. $\left(\sin\frac{x}{x}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

3. $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ 4. $\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin x.\cos x+1)-(\sin x+\cos x)^2=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin x.\cos x+1-\sin x-\cos x)=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0$

Giải ra ta được các nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;k\in Z$.

3. Điều kiện: $\tan x\neq-\sqrt{3}\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow\sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+1)(2\cos x-1)=0$ giải phương trình này và đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Điều kiện: $\begin{cases}\sin x+\cos x\neq 0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Phương trình $\Leftrightarrow\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x+\sin x}$

$\Leftrightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$ ta có phương trình

$\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos t\Leftrightarrow-\cos 3t=2\cos t\Leftrightarrow 4\cos^3 t-5\cos t=0$

$\Leftrightarrow\cos t=0\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Bài 22. Giải các phương trình sau:

1. $4\sin x=\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}$ 2. $\tan^2 x+\tan^2 y+\cot^2(x+y)=1$

3. $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$

4. $\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2+\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=\sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)$ (1)

Ta thấy: Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $x_0+\pi$ cũng là nghiệm. Nên ta tìm nghiệm $x\in[0;\pi]$.

Lúc đó: (1) $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}\\x=\frac{5\pi}{10}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{10}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Ta có: $\cot(x+y)=\frac{1-\tan x.\tan y}{\tan x+\tan y}$

$$\Leftrightarrow \tan x\cot(x+y)+\tan y\cot(x+y)+\tan x\tan y=1$$

Áp dụng BĐT $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ta có: $\tan^2x+\tan^2y+\cot^2(x+y)\ge 1$

Nên phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x=\tan y\\\tan x=\cot(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}-x-y+l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi+l\pi\\y=\frac{\pi}{6}+l\pi\end{cases};k,l\in\mathbb{Z}.$

3. Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x\left(1-\sin^2 3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\sin^2 3x\\\sin^2 3x\cos^2 3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 3x=1\\\sin x=\frac{1}{2}\end{cases}\ \text{v}\ \begin{cases}\sin^2 3x=0\\\sin x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. Ta có: $VP\le\frac{25}{2}$. Áp dụng BĐT: $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$ ta có:

Vế trái $\ge\frac{1}{2}\left[\sin^2x+\cos^2x+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\right]^2=\frac{1}{2}\left[1+\frac{4}{\sin^2 2x}\right]^2\ge\frac{25}{2}$

Nên phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin y=1\\\sin^2 2x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{cases};k\in\mathbb{Z}.$

Vấn đề 2. Tìm nghiệm phương trình lượng giác cơ bản

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tổng các nghiệm trong khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình:

1. $\sin(3x+\frac{\pi}{3})=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$
2. $\sin^2 2x=\cos^2(3x-\frac{\pi}{8})$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}-2x+k2\pi\\3x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{5}\\x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Do $x\in(-\pi;\pi)$ nên ta có: $x=-\frac{43\pi}{60},x=-\frac{19\pi}{60},x=\frac{\pi}{12},x=\frac{29\pi}{60},x=\frac{53\pi}{60},x=-\frac{\pi}{12}$

Vậy tổng các nghiệm trong $(-\pi;\pi)$ bằng $\frac{\pi}{3}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 4x=\cos(\pi+4x)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x-\frac{\pi}{4}=4x+\pi+k2\pi\\6x-\frac{\pi}{4}=-4x-\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\\x=-\frac{3\pi}{40}+\frac{k\pi}{5}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Các nghiệm nằm trong $(-\pi;\pi)$ của phương trình là:

$x=\frac{5\pi}{8},x=-\frac{7\pi}{8},x=-\frac{27\pi}{40},x=-\frac{19\pi}{40},x=-\frac{11\pi}{40},x=-\frac{3\pi}{40},x=\frac{\pi}{8},$

$x=\frac{13\pi}{40},x=\frac{21\pi}{40},x=\frac{29\pi}{40},x=\frac{37\pi}{40}$

Vậy tổng các nghiệm thuộc $(-\pi;\pi)$ là: $\frac{7\pi}{8}$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của các phương trình sau:

1. $\sin^2 2x+\cos^2 5x=1$
2. $(\sin x+\cos x)^2=2\cos^2 3x$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 10x}{2}=1$

$$\Leftrightarrow \cos 10x=\cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10x=4x+k2\pi\\10x=-4x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\x=\frac{k\pi}{7}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình là:

$$x=\frac{\pi}{7},x=-\frac{\pi}{7}.$$

2. Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x=1+\cos 6x$

$$\Leftrightarrow \cos 6x=\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\6x=-\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}\\x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho là: $x=\frac{\pi}{16},x=-\frac{\pi}{8}$.

Ví dụ 3. Tìm số dương nhỏ nhất của phương trình:

1. $\cos\left[\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left(\pi x^2\right)$ 2. $\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi(x+1)^2\right]$

Giải

1. Phương trình $\sin\left[\pi(x^2+2x)\right]=\sin\left(\pi x^2\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi(x^2+2x)=\pi x^2+k2\pi\\\pi(x^2+2x)=\pi-\pi x^2+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\in\mathbb{Z}\\2x^2+2x-2k-1=0\ \ (1)\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x^2=\pi(x+1)^2+k2\pi\\\pi x^2=\pi-\pi(x+1)^2+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{2k+1}{2}\\x^2+x-k=0\end{array}\right.$

Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $x=-\frac{2k+1}{2},k\in\mathbb{Z}$ là $x=\frac{1}{2}$

Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $x^2+x-k=0$ là: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{2}$

Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1$

Giải

Phương trình $3x-\sqrt{9x^2+160x+800}=16k \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{16k}{3}\\x=\frac{8k^2-25}{3k+5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{16k}{3}\\9x=24k-40-\frac{25}{3k+5}\end{cases}$

Theo bài toán suy ra: $\frac{25}{3k+5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,-2,-10\}$

Thử lại ta có các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x=-7(k=-2),\ x=-31\ (k=-10).$$

Ví dụ 5. Tính tổng các nghiệm nằm trong khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình sau:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=2\sqrt{2}\sin 2x.$$

Giải

Ta có $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Nên phương trình đã cho tương đương với: $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin x+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos x=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{7\pi}{12}+\cos x.\sin\frac{7\pi}{12}=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{7\pi}{12})=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=x+\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\2x=\pi-x-\frac{7\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

Do $x\in(0;2\pi)$ nên phương trình có các nghiệm là: $\frac{7\pi}{12};\ \frac{5\pi}{36};\ \frac{29\pi}{36};\ \frac{53\pi}{36}$.

Vậy tổng các nghiệm cần tính là: 3π.

Chú ý: Ta có thể giải theo cách khác như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin(x+\frac{7\pi}{12})=\sin 2x$$

Tiếp tục giải ta được kết quả như trên.

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm tổng các nghiệm của phương trình:

1. $2\cos(x-\frac{\pi}{3})=1$ trên $(-\pi;\pi)$ 2. $\sin(5x+\frac{\pi}{3})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ trên $[0;\pi]$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in(-\pi;\pi)$ nên: * Với $x=k2\pi$ ta chỉ chọn được $k=0\Rightarrow x=0$.

* Với $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ ta chỉ chọn được $k=0\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{2\pi}{3}$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \sin(5x+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{5\pi}{6}-2x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-2x+k2\pi\\ 5x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

- Với $x=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\le\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{14}\le k\frac{2\pi}{7}\le\frac{13\pi}{14}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le\frac{13}{4}$. Do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$

Suy ra các nghiệm: $x=\frac{\pi}{14}, x=\frac{5\pi}{14}, x=\frac{9\pi}{14}, x=\frac{13\pi}{14}$.

- Với $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 0\le -\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\le\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{18}\le k\frac{2\pi}{3}\le\frac{19\pi}{18}\Leftrightarrow \frac{1}{12}\le k\le\frac{19}{12}$. Do $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=1$

Suy ra các nghiệm: $x=\frac{11\pi}{18}$. Vậy tổng các nghiệm là: $\frac{47\pi}{18}$.

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0.$$

Giải

Điều kiện: $9x^2-16x-80\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x-\sqrt{9x^2-16x-80}=4k\Leftrightarrow \sqrt{9x^2-16x-80}=3x-4k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{4k}{3}\\ 9x^2-16x-80=(3x-4k)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{4k}{3}\\ x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2k^2+10}{3k-2}\ge\frac{4k}{3}\\ x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\ge 4\\ \frac{2k^2+10}{3k-2}\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}\frac{2k^2+10}{3k-2}\ge\frac{4k}{3}\\ x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-6k^2+8k+30}{3k-2}\ge 0\\ \frac{2k^2-12k+18}{3k-2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{2}{3}<k\le 3$

Vì $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=1,2,3$.

* $k=1\Rightarrow \frac{2k^2+10}{3k-2}=12\in\mathbb{Z}$ * $k=2\Rightarrow \frac{2k^2+10}{3k-2}=\frac{9}{2}\notin\mathbb{Z}$

* $k=3\Rightarrow \frac{2k^2+10}{3k-2}=4\in\mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện, ta có $x=4, x=12$ là những giá trị cần tìm.

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\cos\pi(3-\sqrt{3+2x-x^2})=-1$.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow \pi\left(3-\sqrt{3+2x-x^2}\right)=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2-2k=\sqrt{3+2x-x^2}$

Ta có: $0\le\sqrt{4-(1-x)^2}\le 2$ và $2-2k$ là số chẵn nên ta có các nghiệm là:

$$x=-1, x=3, x=1.$$

Bài 4. Tìm $x \in [0; 4\pi]$ nghiệm đúng phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; 4\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$..

Bài 5. Tìm nghiệm trên khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình:

$$2(\sin x + 1)(\sin^2 2x - 3\sin x + 1) = \sin 4x.\cos x.$$

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với:

$$2(\sin x + 1)\left(\frac{1 - \cos 4x}{2} - 3\sin x + 1\right) = \sin 4x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(3 - 6\sin x - \cos 4x) = \sin 4x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(3 - 6\sin x) - \sin x.\cos 4x - \cos 4x = \sin 4x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x = \sin 5x + \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 3.2.\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2.\cos\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).\cos^3\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (-\pi; \pi)$ nên suy ra $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$.

Bài 6. Tìm nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ của phương trình: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$.

Giải

Điều kiện: $\cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x \sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ta thấy $x = \pi$ không là nghiệm của phương trình.

- Nếu $x \in (0; \pi)$ thì phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x \sin x}{\sqrt{2}\sin x} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} < \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < k < \frac{15}{8}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} \\ x = \frac{9\pi}{16} \end{array}\right.$.

- Nếu $x \in (\pi; 2\pi)$ thì phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x \sin x}{-\sqrt{2}\sin x} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in (\pi; 2\pi) \Rightarrow \pi < \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} < 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{8} < k < \frac{27}{8}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{21\pi}{16} \\ x = \frac{29\pi}{16} \end{array}\right.$.

Nghiệm phương trình thỏa mãn bài toán là: $x = \frac{\pi}{16}; x = \frac{9\pi}{16}; x = \frac{21\pi}{16}; x = \frac{29\pi}{16}$.

Vấn đề 3. Phương pháp loại nghiệm khi giải phương trình lượng giác có điều kiện

I. CÁC PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp 1: Biểu diễn các nghiệm và điều kiện lên đường tròn lượng giác. Ta loại đi những điểm biểu diễn của nghiệm mà trùng với điểm biểu diễn của điều kiện.

Với cách này chúng ta cần ghi nhớ:

- Điểm biểu diễn cung α và $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ trùng nhau
- Để biểu diễn cung $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ lên đường tròn lượng giác ta cho k nhận n giá trị (thường chọn $k = 0, 1, 2, ..., n-1$) nên ta có được n điểm phân biệt cách đều nhau trên đường tròn tạo thành một đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn.

Phương pháp 2: Sử dụng phương trình nghiệm nguyên

Giả sử ta cần đối chiếu hai họ nghiệm $\alpha + \frac{k\pi}{n}$ và $\beta + \frac{l\pi}{m}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$ đã biết, còn $k, l \in \mathbb{Z}$ là các chỉ số chạy.

Ta xét phương trình: $\alpha + \frac{k\pi}{n} = \beta + \frac{l\pi}{m} \Leftrightarrow ak + bl = c$ (*)

Với a, b, c là các số nguyên.

Trong trường hợp này ta quy về giải phương trình nghiệm nguyên:

$$ax + by = c \qquad (1).$$

Để giải phương trình (1) ta cần chú ý kết quả sau:

- Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow d = (a, b)$ là ước của c
- Nếu phương trình (1) có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì (1) có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{t} \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

Phương pháp 3: Thử trực tiếp

Phương pháp này là ta đi giải phương trình tìm nghiệm rồi thay nghiệm vào điều kiện để kiểm tra.

Phương pháp 4: Biểu diễn điều kiện và nghiệm thông qua một hàm số lượng giác:

Giả sử ta có điều kiện là $u(x) \neq 0$ ($u(x) \geq 0, u(x) \leq 0$), ta biến đổi phương trình đã cho về phương trình chứa $u(x)$ và giải phương trình để tìm $u(x)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

1. $\cot 3x = \cot x$ 2. $\cot 4x . \cot 7x = 1$

Giải

1. Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{3}$

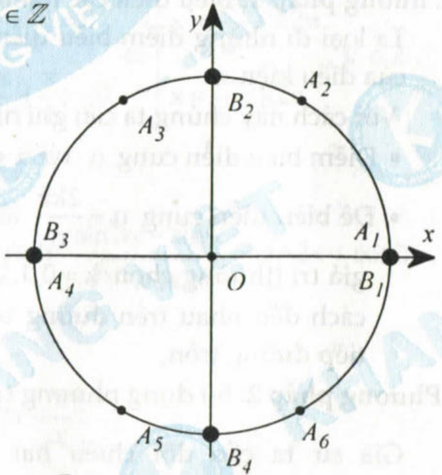
Phương trình $\Leftrightarrow 3x = x + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Loại nghiệm: Để loại nghiệm của phương trình ta có các cách sau:

* **Cách 1:** Biểu diễn các điểm cuối của cung $k\frac{\pi}{3}$ ta có các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

Biểu diễn các điểm cuối của cung $\frac{n\pi}{2}$ ta có các điểm B_1, B_2, B_3, B_4.

Ta thấy $A_1 \equiv B_1$, $A_4 \equiv B_3$.



Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

* **Cách 2:** Ta có $\frac{n\pi}{2} = \frac{k\pi}{3} \Leftrightarrow n = \frac{2k}{3} \Rightarrow \begin{cases} k = 3t \\ n = 2t \end{cases}$

Do đó ta cần loại những giá trị n chẵn.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{4} \\ x \neq \frac{n\pi}{7} \end{cases}; k, n \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \cot 7x = \tan 4x = \cot(\frac{\pi}{2} - 4x)$

$$\Leftrightarrow 7x = \frac{\pi}{2} - 4x + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{22} + m\frac{\pi}{11}.$$

- Ta có: $\frac{\pi}{22} + m\frac{\pi}{11} = \frac{k\pi}{4} \Leftrightarrow 2 + 4m = 11k \Leftrightarrow m = 3k - \frac{k+2}{4}$

Vì $m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k+2}{4} = t \Rightarrow k = 4t - 2 \Rightarrow m = 11t - 6$.

- Ta có: $\frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11} = \frac{n\pi}{7} \Leftrightarrow 7 + 14m = 22n \Rightarrow 22n - 14m = 7$

Vì $22n - 14m$ là số chẵn còn 7 là số lẻ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11}$ với $m \neq 11t - 6$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình sau: $\frac{\sin x \cot 5x}{\cos 9x} = 1$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 5x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{m\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{m\pi}{9} \end{cases}, m \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x \cos 5x = \cos 9x \sin 5x$

$$\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x \Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x$$

$$\left[\begin{array}{l} 14x = 6x + k2\pi \\ 14x = \pi - 6x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- Nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{4}$ bị loại khi và chỉ khi một trong hai phương trình sau có nghiệm nguyên m,k

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{k\pi}{4}=\dfrac{m\pi}{5}\\ \dfrac{k\pi}{4}=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{m\pi}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5k=4m\\ 9k-4m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=5t\\ k=4t\end{cases}\\ \begin{cases}k=2+4t\\ m=4+9t\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow k\ (\text{chẵn})$$

- Nghiệm $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}$ bị loại khi và chỉ khi một trong hai phương trình sau có nghiệm nguyên m,k

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}=\dfrac{m\pi}{5}\\ \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{m\pi}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-2k=1\\ 18k-10m=1\end{array}\right.$$ ta thấy cả hai phương trình này vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10},\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Giải phương trình: $|\sin x|=\cos 2x$

Giải

* Cách 1:

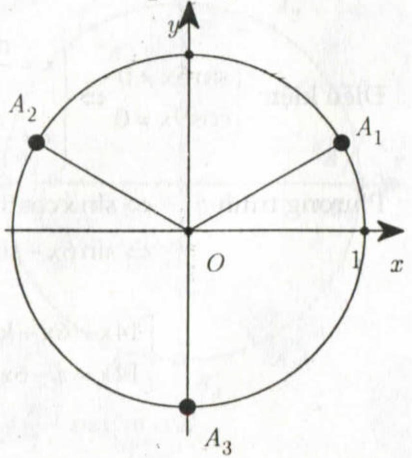
- Với $\sin x\ge 0$ (*) thì phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 2x=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3} & (1)\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi & (2)\end{array}\right.$$

Dễ thấy nghiệm (2) không thỏa mãn (*)

Biểu diễn nghiệm (1) lên đường tròn lượng giác ta được các điểm A_1, A_2, A_3. Trong đó chỉ có hai điểm A_1, A_2 nằm phía trên Ox

Hai điểm này ứng với các cung $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$.



- Với $\sin x<0$ (**) thì phương trình đã cho tương đương với:

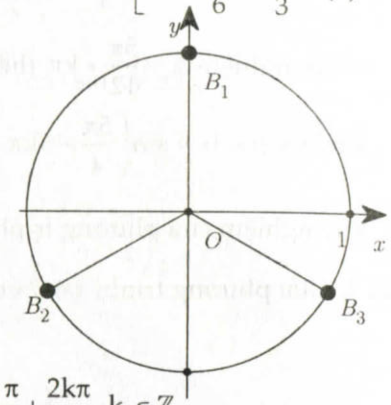
$$\cos 2x=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\\ 2x=-\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi & (3)\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} & (4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy (3) không thỏa mãn (**)

Biểu diễn (4) trên đường tròn lượng giác ta được các điểm B_1, B_2, B_3

Trong đó chỉ có hai điểm B_2, B_3 nằm dưới Ox ($\sin x<0$).

Hai điểm đó ứng với cung: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$



Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2. Giải phương trình: $\cos 3x\tan 4x=\sin 5x$.

Giải

Điều kiện: $\cos 4x\ne 0$

Phương trình $\Leftrightarrow\sin 4x\cos 3x=\sin 5x\cos 4x$

$\Leftrightarrow\sin 7x+\sin x=\sin 9x+\sin x\Leftrightarrow\sin 9x=\sin 7x$

$\Leftrightarrow x=k\pi, x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$.

- Với $x=k\pi$ thì $\cos 4x=\cos 4k\pi=1\ne 0$
- Với $x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{8}$ thì $\cos 4x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right)\ne 0$ đúng với mọi k

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin 3x+\cos 3x)=\sqrt{1+2\sin 6x+2\sin 2x}$.

Giải

$$\text{Phương trình}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x\ge 0\\ 2(\sin 3x+\cos 3x)^2=1+2\sin 6x+2\sin 2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x\ge 0\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 3x+\cos 3x\ge 0\ (*)\\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\ (1), x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\quad(2)\end{cases}$$

- Với nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin 3x + \cos 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3k\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3k\pi\right) \ge 0 \Leftrightarrow k = 2n$$

- Với nghiệm $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ thì

$$\sin 3x + \cos 3x = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 3k\pi\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 3k\pi\right) \ge 0 \Leftrightarrow k = 2n + 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$ và $x = \frac{17\pi}{12} + 2n\pi$.

Bài 4. Giải phương trình: $\tan 2x \tan 3x \tan 7x = \tan 2x + \tan 3x + \tan 7x$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \ne 0 \\ \cos 3x \ne 0 \\ \cos 7x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \ne \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x \ne \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} \end{cases}.$

Phương trình $\Leftrightarrow -\tan 2x(1 - \tan 3x \tan 7x) = \tan 3x + \tan 7x$

Nếu $\tan 3x \tan 7x = 1 \Rightarrow \tan 3x + \tan 7x = 0$ vô lí

Nên ta có phương trình : $-\tan 2x = \frac{\tan 3x + \tan 7x}{1 - \tan 3x \tan 7x} = \tan 10x$

$$\Leftrightarrow 10x = -2x + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{m\pi}{12}.$$

Loại nghiệm: Với bài toán này nếu chúng ta sử dụng phương pháp loại nghiệm bằng cách biểu diễn lên đường tròn lượng giác hay phương pháp thử trực tiếp sẽ phải xét nhiều trường hợp. Do đó ta lựa chọn phương pháp đại số.

- $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{m\pi}{12} \Leftrightarrow 3 + 6k = m$
- $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} = \frac{m\pi}{12} \Leftrightarrow 2 + 4k = m$
- $\frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7} = \frac{m\pi}{12} \Leftrightarrow 6 + 12k = 7m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12t + 6 \\ k = 7t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k\pi}{12}$ với $\begin{cases} k \ne 2(2t + 1) \\ k \ne 3(2t + 1) \\ k \ne 6(2t + 1) \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

Bài 5. Giải phương trình: $\frac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} - \tan x = \tan x.\tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x + 2\cos x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ne -1 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \ne \pm 1.$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} = \tan x\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} = \frac{\tan x}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\tan x}{1 + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos x(1 + \sin x)} \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x \quad (*)$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ (loại), $\sin x = \frac{1}{2}$ (nhận)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{3}{8\cos x}} = \sin x$.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \frac{3}{8\cos x} = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ 8\cos x(1 - \cos^2 x) = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ 8\cos^3 x - 8\cos x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 & (1) \\ (2\cos x - 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta có các nghiệm $\cos x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$

Vì các nghiệm của phương trình phải thỏa mãn điều kiện (1) nên ta tìm cách biểu diễn các nghiệm qua sinx.

- $\cos x=\frac{1}{2}$ ta có $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$
- $\cos x=\frac{1-\sqrt{13}}{4}\Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\frac{1}{4}\sqrt{2+2\sqrt{13}}$

$$\Leftrightarrow x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{13}}}{4}\right)+k2\pi,\quad x=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{13}}}{4}\right)+k2\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{13}}}{4}\right)+k2\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$$

$$x=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{13}}}{4}\right)+k2\pi.$$

Bài 7. Giải phương trình: $\frac{\cos 2x(2\cos 2x+1)}{\sin 3x}=\cot x$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin 3x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 3x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos 2x(3-4\sin^2 x)}{\sin x(3-4\sin^2 x)}=\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=\cos x\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

- Với $\cos x=1\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow \sin 3x=0\Rightarrow \cos x=1$ loại.
- Với $\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 3x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)=\sin x\left(4\cos^2 x-1\right)=0$

Suy ra $\cos x=-\frac{1}{2}$ loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 8. Giải các phương trình sau:

1. $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$
2. $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$
3. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$
4. $\tan^4 x+1=\frac{(2-\sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$
5. $\cos 3x\tan 5x=\sin 7x$
6. $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\cot x-1}$.

Giải

1. Điều kiện: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x\neq \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cos x+2\sin 2x}{2\cos x\cos 2x+\cos 2x}=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{m\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z}$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{6}+n\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

2. Điều kiện: $\cos x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\tan^2 x=1-\cos x-1-\tan^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

3. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq \pm 1\\ \sin x\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin^2 x+\sin x-1\right)=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$

Hay $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=(2-\sin^2 2x)\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=\frac{1}{2}$ (*)

Ta thấy $\sin x=\pm 1$ không thỏa mãn (*)

Vậy nghiệm phương trình : $\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 3x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

5. Điêu kiện: $\cos 5x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 12x = \sin 8x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$.

Sử dụng phương pháp thử trực tiếp ta có: $x = m\pi, x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$; $m, k \in \mathbb{Z}$.

6. Điều kiện: $\begin{cases} \tan x + \cot 2x \neq 0 \\ \cot x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x - \cos x \neq 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x = -\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm: $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 9. Giải các phương trình sau:

1. $2\tan x + \frac{1}{2}\cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{2\sin 2x}$
2. $\tan 2x = \tan 3x + \tan 5x + \tan 2x \tan 3x \tan 5x$
3. $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8\sin^2 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 8\cos^2 x$
4. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$.

Giải

1. Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x + \cos 2x = 4\sin^2 2x + 1$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 3\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \text{ (loại)} \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Điều kiện: $\cos 2x.\cos 3x.\cos 5x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 5x = \tan(-x) \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Thay vào điều kiện kiểm tra trực tiếp hoặc sử dụng phương trình nghiệm nguyên ta tìm được nghiệm của phương trình là:

$$x = k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos 5x \cos 3x = 8\sin x \cos x \sin 3x \cos 3x$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 8x = 4\sin 6x \sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x(\cos 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{k\pi}{2}$$

Sử dụng phương pháp phương trình nghiệm nguyên ta có được nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, x = m\pi$.

4. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)} + \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x - \cos x}\left(\sqrt{-\sin x - \cos x} + \sqrt{\sin x - \cos x} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ -2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = 4 \quad (*) \end{array} \right.$$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos 2x} = 2 + \cos x \Leftrightarrow \cos 2x = 4 + 4\cos x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 4\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$

Thử trực tiếp ta thấy: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm phương trình.

Vấn đề 4. Phương trình lượng giác chứa tham số

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình: $2\sin(x + \frac{\pi}{10}) = 2m + 1$.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = \frac{2m+1}{2}$

- Nếu $-1 \leq \frac{2m+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{10} + \arcsin\frac{2m+1}{2} + k2\pi \\ x = \frac{9\pi}{10} - \arcsin\frac{2m+1}{2} + k2\pi \end{array} \right., k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{3}{2} \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình: $m\cos 2x = m - 1$.

Giải

- Nếu $m \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{m-1}{m}\right| \leq 1 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm: $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{m-1}{m} + k2\pi$
- Nếu $m < \dfrac{1}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3. Cho phương trình: $(m-1)\cos x + 2\sin x = m + 3$

1. Giải phương trình khi $m = -2$ **2.** Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

1. Với $m = -2$ ta có phương trình: $3\cos x - 2\sin x = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{13}}\cos x - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x = -\frac{1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

Với $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}; \alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow x + \alpha = \pm\arccos\frac{-1}{\sqrt{13}} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\alpha \pm \arccos\frac{-1}{\sqrt{13}} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (m-1)^2 + 4 \geq (m+3)^2 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình: $(m+1)\cos x + (m-1)\sin x = 2m + 3$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $|x_1 - x_2| = \dfrac{\pi}{3}$.

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x + \frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x = \frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$$

$\Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \cos\beta$ (với đk $-1 \leq \dfrac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}} \leq 1$ (*))

(Trong đó $\cos\alpha = \dfrac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}; \cos\beta = \dfrac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$) $\Leftrightarrow x = \beta \pm \alpha + k2\pi$.

Do đó x_1, x_2 có dạng $x_1 = \beta + \alpha + k_1 2\pi;\ x_2 = \beta - \alpha + k_2 2\pi$

(Vì nếu x1,x2 cùng thuộc một họ nghiệm thì $x_1 - x_2 = l2\pi,\ l \in \mathbb{Z}$)

Do đó: $|x_1 - x_2| = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow |2\alpha + (k_1 - k_2)2\pi| = \dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos|2\alpha + (k_1 - k_2)2\pi| = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ nên ta có: $\dfrac{1}{2} = 2\left(\dfrac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{(m+1)^2}{2m^2+2}$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$ (ko thoả mãn (*))

Vậy không tồn tại m thoả mãn yêu cầu bài toán .

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau:

1. $4\sin 2x = 2m + 1$ 2. $(m-1)\cos^2(4x + \dfrac{\pi}{3}) = 2m$

3. $\tan(2x - \dfrac{\pi}{6}) = m + 1$ 4. $m\cot^2(2x - \dfrac{\pi}{8}) = 2m + 1$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{2m+1}{4}$ (1)

- Nếu $\dfrac{|2m+1|}{4} \leq 1 \Leftrightarrow |2m+1| \leq 4 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2m+1}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2m+1}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $m \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

2.
- Nếu $m = 1 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 1 \Rightarrow$ phương trình đa cho $\Leftrightarrow \cos^2\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2m}{m-1}$ (2)

+) Nếu $\begin{cases} \dfrac{2m}{m-1} \geq 0 \\ \dfrac{2m}{m-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty) \\ -1 \leq m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ thì:

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{\frac{2m}{m-1}}$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2m}{m-1}}\right)+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2m}{m-1}}\right)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

+) Nếu $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

3. Với mọi giá trị của m ta có phương trình đã cho tương đương với

$$2x-\frac{\pi}{6}=\arctan(m+1)+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\arctan(m+1)+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

4. • Nếu $m=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

• Nếu $m\neq 0$ thì phương trình đã ch tương đương với

$$\cot^2\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2m+1}{m} \quad (4)$$

+) Nếu $\frac{2m+1}{m}<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<0$ thì phương trình (4) vô nghiệm.

+) Nếu $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{1}{2} \\ m>0 \end{array}\right.$ thì phương trình (4) có nghiệm là:

$$2x-\frac{\pi}{8}=\operatorname{arccot}\left(\pm\sqrt{\frac{2m+1}{m}}\right)+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(\pm\sqrt{\frac{2m+1}{m}}\right)+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 2. Giải và biện luận các phương trình sau:

1. $m\sin^2 2x+m-1=0$ 2. $(2m-1)\tan^2 3x=m+2$

Giải

1. • Nếu $m=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Nếu $m\neq 0 \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1-m}{m}$.

+) $\left|\frac{1-m}{m}\right|>1 \Leftrightarrow |1-m|>|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{2} \\ m\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

+) $m\ge\frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)+k\pi \end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. • Nếu $m=\frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

• Nếu $m\neq\frac{1}{2}$ thì phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 3x=\frac{m+2}{2m-1}$

+) Nếu $-2<m<\frac{1}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+) Nếu $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m>\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình có nghiệm : $x=\frac{1}{3}\arctan\left(\pm\sqrt{\frac{m+2}{2m-1}}\right)+\frac{k\pi}{3}$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

1. $\cos 2x+\cos^2 x+3\sin x+2m=0$ có nghiệm

2. $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin^2 x-3\sin x=2m+2$

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$. Ta có phương trình : $3t^2-3t=2m+2$

Xét hàm số $f(t)=3t^2-3t$, $t\in[-1;1]$

Bảng biến thiên:

t	−1		1
f(t)	6	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow 0\le 2m+2\le 6 \Leftrightarrow -1\le m\le 2$.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ \cos x-m=0 \end{array}\right.$$

Ta có : $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow -1\le\cos x\le 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow -1\le m\le 0$.

Bài 4. Giải và biện luận phương trình:

1. $\left(8m^2+1\right)\sin^3 x-\left(4m^2+1\right)\sin x+2m\cos^3 x=0$

2. $2m\sin x\cos x-\left(\sin x+\cos x\right)+1=0$.

3. $m\cot 2x=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^6 x+\sin^6 x}$.

Giải

1. • Nếu $m=0$, phương trình $\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin x=0$

$\sin x\cos^2 x=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

• Nếu $m\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta được

$(8m^2+1)\tan^3 x-(4m^2+1)\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2m=0$

$\Leftrightarrow 4m^2\tan^3 x-(4m^2+1)\tan x+2m=0$

$\Leftrightarrow (2m\tan x-1)(2m\tan^2 x+\tan x-2m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\dfrac{1}{2m}\\ 2m\tan^2 x+\tan x-2m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\dfrac{1}{2m}\\ \tan 2x=4m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arctan\dfrac{1}{2m}+k\pi\\ x=\dfrac{1}{2}\arctan(4m)+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.$$

Kết luận:

• Nếu $m=0$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

• Nếu $m\neq 0$ thì phương trình có nghiệm:

$x=\dfrac{k\pi}{2},x=\arctan\dfrac{1}{2m}+k\pi,x=\dfrac{1}{2}\arctan(4m)+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

2. Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Thay vào phương trình ta có:

$$m(t^2-1)-t+1=0\Leftrightarrow (t-1)(mt+m-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ mt=1-m\end{array}\right.$$

• $t=1\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$.

• Xét phương trình : $mt=1-m$ (*)

+) Nếu $m=0\Rightarrow$ (*) vô nghiệm

+) Nếu $\left|\dfrac{1-m}{m}\right|\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m^2+2m-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq -1-\sqrt{2}\\ m\geq -1+\sqrt{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$(*)$\Leftrightarrow t=\dfrac{1-m}{m}\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-m}{m\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\dfrac{1-m}{m\sqrt{2}}\right)+k2\pi$.

+) $\begin{cases}m\neq 0\\ -1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow t=\dfrac{1-m}{m}$ vô nghiệm.

Kết luận:

• Nếu $-1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

• Nếu $\left[\begin{array}{l}m<-1-\sqrt{2}\\ m>-1+\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình có nghiệm:

$$x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\dfrac{1-m}{m\sqrt{2}}\right)+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. Phương trình $\Leftrightarrow m\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos 2x}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}$

• Phương trình luôn có nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

• Phương trình: $\dfrac{m}{\sin 2x}=\dfrac{4}{4-3\sin^2 2x}$ hay $3mt^2+4t-4m=0$ (*)

Với $t=\sin 2x\in\left[-1;1\right]\setminus\{0\}$.

+) $m=0$ phương trình vô nghiệm

+) $m\neq 0\Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1t_2=-\dfrac{4}{3}$ nên trong đó nếu có thì chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $\left[-1;1\right]$

Nghiệm $t=\dfrac{-2+2\sqrt{1+3m^2}}{3m}\in\left[-1;1\right]\Leftrightarrow \left|2\sqrt{1+3m^2}-2\right|\leq 3|m|$

$\Leftrightarrow 3m^2+8\leq 8\sqrt{1+3m^2}\Leftrightarrow 9m^4-144m^2\leq 0\Leftrightarrow |m|\leq 2$

Nghiệm $t=\dfrac{-2-2\sqrt{1+3m^2}}{3m}\in\left[-1;1\right]\Leftrightarrow \left|2\sqrt{1+3m^2}+2\right|\leq 3|m|$ vô nghiệm.

Vậy : * Nếu $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ |m|>2 \end{array}\right.$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

* Nếu $\begin{cases} m\neq 0 \\ |m|\le 2 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

$$x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{-2+2\sqrt{1+3m^2}}{3m}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{-2+2\sqrt{1+3m^2}}{3m}+k\pi.$$

Bài 5. Tìm m để phương trình:

1. $m\cos 2x+\sin x=\cos x\cot x$ có đúng 4 nghiệm thuộc $(0;2\pi)$
2. $(1-m)\tan^2 x-\frac{2}{\cos x}+1+3m=0$ có nhiều hơn một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
3. $m\tan^2 x+2\tan x-1=\frac{1}{\cos^2 x}$ có nghiệm.
4. $\cos 4x=\cos^2 3x+m\sin^2 x$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$.

Giải

1. Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x\neq 0 & (1) \\ \cos 2x(m\sin x-1)=0 & (2) \end{cases}$

- Nếu $m=0\Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4},x=\frac{3\pi}{4},x=\frac{5\pi}{4},x=\frac{7\pi}{4}\Rightarrow m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

- $m\neq 0$. Vì phương trình luôn có 4 nghiệm trên $(0;2\pi)$ nếu yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $m\sin x-1=0$ vô nghiệm hoặc có các nghiệm trên.

Điều đó xảy ra khi $\begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \left|\frac{1}{m}\right|>1 \\ \left|\frac{1}{m}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} |m|<1 \\ m=\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} |m|<1 \\ m=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

2. Phương trình $\Leftrightarrow\frac{1-m}{\cos^2 x}-\frac{2}{\cos x}+4m=0$

Đặt $t=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow t>1\ \forall x\in(1;+\infty)$

Ta có phương trình : $(1-m)t^2-2t+4m=0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có nhiều hơn một nghiệm $t>1$

$\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2>1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 1-m\neq 0 \\ \Delta'=1+4m(m-1)>0 \\ (t_1-1)+(t_2-1)>0 \\ (t_1-1)(t_2-1)>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1,m\neq\frac{1}{2} \\ t_1+t_2-2>0 \\ t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1,m\neq\frac{1}{2} \\ \frac{2}{1-m}-2>0 \\ \frac{4m}{1-m}-\frac{2}{1-m}+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1,m\neq\frac{1}{2} \\ \frac{2m}{1-m}>0 \\ \frac{3m-1}{1-m}>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq 1,m\neq\frac{1}{2} \\ 0<m<1 \\ \frac{1}{3}<m<1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}<m<1 \end{cases}.$$

3. Phương trình $\Leftrightarrow m\tan^2 x+2\tan x-1=1+\tan^2 x$

$\Leftrightarrow(m-1)\tan^2 x+2\tan x-2=0$ (1)

- $m=1\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow\tan x=1$
- $m\neq 1$. Ta có (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=2m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$

Vậy $m\ge\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

4. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{m(1-\cos 2x)}{2}$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x-4\cos^2 2x-3\cos 2x+3+m(1-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow(\cos 2x-1)(4\cos^2 2x-3-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \cos 2x=1 \\ \cos^2 2x=\frac{m+3}{4} \end{array}\right.$

Vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos 2x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{4} < \frac{m+3}{4} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Bài 6. Cho phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + a = 0$

1. Giải $a = -2$

2. Tìm a để phương trình có nghiệm.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + a = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 4\cos 2x + 4a + 3 = 0$

1. Với $a = -2 \Rightarrow \cos^2 2x - 4\cos 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2. Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 2x - 4\cos 2x = -4a - 3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -3 \le -4a - 3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le a \le 0$.

Bài 8: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + m = 0$

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x - \cos 2x + m = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 4\cos 2x = -3 - 4m$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow t \in [-1;1]$

Ta có phương trình: $f(t) = t^2 - 4t = -4m - 3$

Bảng biến thiên:

t	-1		1
$f(t)$	5	$\searrow$	-3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow -3 \le -4m - 3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$.

CHỦ ĐỀ 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

CHƯƠNG 1: TỔ HỢP

Vấn đề 1. Quy tắc đếm

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Quy tắc cộng

a) Định nghĩa: Xét một công việc H.

Giả sử H có k phương án $H_1, H_2, ..., H_k$ thực hiện công việc H. Nếu có m_1 cách thực hiện phương án H_1, có m_2 cách thực hiện phương án H_2,..., có m_k cách thực hiện phương án H_k và mỗi cách thực hiện phương án H_i không trùng với bất kì cách thực hiện phương án H_j $(i \ne j; i, j \in \{1,2,...,k\})$ thì có $m_1 + m_2 + ... + m_k$ cách thực hiện công việc H.

b) Công thức quy tắc cộng

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau. Khi đó:

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$

2. Quy tắc nhân.

a) Định nghĩa: Giả sử một công việc H bao gồm k công đoạn $H_1, H_2, ..., H_k$. Công đoạn H_1 có m_1 cách thực hiện, công đoạn H_2 có m_2 cách thực hiện,..., công đoạn H_k có m_k cách thực hiện. Khi đó công việc H có thể thực hiện theo $m_1.m_2...m_k$ cách.

b) Công thức quy tắc nhân

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau. Khi đó:

$|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = |A_1|.|A_2|.....|A_n|$.

3. Phương pháp đếm bài toán tổ hợp dựa vào quy tắc cộng

Để đếm số cách thực hiện một công việc H nào đó theo quy tắc cộng ta cần phân tích xem công việc H đó có bao nhiêu phương án thực hiện? Mỗi phương án có bao nhiêu cách chọn?

4. Phương pháp đếm bài toán tổ hợp dựa vào quy tắc nhân

Để đếm số cách thực hiện công việc H theo quy tắc nhân, ta cần phân tích công việc H được chia làm các giai đoạn $H_1, H_2, ..., H_n$ và đếm số cách thực hiện mỗi giai đoạn H_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Nhận xét:

1. *Ta thường gặp bài toán đếm số phương án thực hiện hành động H thỏa mãn tính chất T. Để giải bài toán này ta thường giải theo hai cách sau*

Cách 1: Đếm trực tiếp

- Nhận xét đề bài để phân chia các trường hợp xảy ra đối với bài toán cần đếm.
- Đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp đó
- Kết quả của bài toán là tổng số phương án đếm trong các trường hợp trên

Chú ý: * Để đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp ta phải chia hành động trong mỗi trường hợp đó thành phương án hành động nhỏ liên tiếp nhau và sử dụng quy tắc nhân, các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp để đếm số phương án thực hiện các hành động nhỏ đó.

* Các dấu hiệu đặc trưng để giúp ta nhận dạng một hoán vị của n phần tử là:

+) Tất cả n phần tử đều phải có mặt

+) Mỗi phần tử xuất hiện một lần.

+) Có thứ tự giữa các phần tử.

* Ta sẽ sử dụng khái niệm chỉnh hợp khi

+) Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần

+) k phần tử đã cho được sắp xếp thứ tự.

* Ta sử dụng khái niệm tổ hợp khi

+) Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần

+) Không quan tâm đến thứ tự k phần tử đã chọn.

Cách 2: Đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa mãn tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa mãn tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a-b$.

2. *Ta thường gặp ba bài toán đếm cơ bản*

Bài toán 1: Đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên $x=\overline{a_1...a_n}$ ta cần lưu ý:

* $a_i \in \{0,1,2,...,9\}$ và $a_1 \neq 0$.

* x là số chẵn ⇔ a_n là số chẵn

* x là số lẻ ⇔ a_n là số lẻ

* x chia hết cho 3 ⇔ $a_1+a_2+...+a_n$ chia hết cho 3

* x chia hết cho 4 ⇔ $\overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4

* x chia hết cho 5 ⇔ $a_n \in \{0,5\}$

* x chia hết cho ⇔ x là số chẵn và chia hết cho 3

* x chia hết cho 8 ⇔ $\overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8

* x chia hết cho 9 ⇔ $a_1+a_2+...+a_n$ chia hết cho 9.

* x chia hết cho 11 ⇔ tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

* x chia hết cho 25 ⇔ hai chữ số tận cùng là 00,25,50,75.

Bài toán 2: Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế.

Bài toán 3: Đếm số phương án liên quan đến hình học.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Từ thành phố A đến thành phố B có 6 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 7 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, biết phải đi qua thành phố B.

Giải

Để đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 6 con đường để đi. Với mỗi cách đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 7 cách đi từ thành phố B đến thành phố C. Vậy có $6.7=42$ cách đi từ thành phố A đến B.

Ví dụ 2. Từ các số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Giải

Đặt $y=23$, xét các số $x=\overline{abcde}$ trong đó a,b,c,d,e đôi một khác nhau và thuộc tập $\{0,1,y,4,5\}$. Có $P_5-P_4=96$ số như vậy

Khi ta hoán vị 2,3 trong y ta được hai số khác nhau

Nên có $96.2=192$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3. Có 3 học sinh nữ và 2 học sinh nam. Ta muốn sắp xếp vào một bàn dài có 5 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để:

1. 3 học sinh nữ ngồi kề nhau
2. 2 học sinh nam ngồi kề nhau.

Giải

1. Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán: $3!.3!=36$.
2. Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán: $2!.4!=48$.

Ví dụ 4. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

1. A và F ngồi ở hai đầu ghế
2. A và F ngồi cạnh nhau
3. A và F không ngồi cạnh nhau.

Giải

1. Số cách xếp A, F: $2! = 2$

   Số cách xếp B, C, D, E : $4! = 24$

   Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán: $2.24 = 48$.

2. Xem AF là một phần tử X, ta có: $5! = 120$ số cách xếp X, B, C, D, E. Khi hoán vị A, F ta có thêm được một cách xếp

   Vậy có 240 cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán: $6! - 240 = 480$ cách.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8

Giải

Gọi $x = \overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{0,1,2,4,5,6,8\}$.

* **Cách 1:** Tính trực tiếp

Vì x là số chẵn nên $d \in \{0,2,4,6,8\}$.

Trường hợp 1: $d = 0 \Rightarrow$ có 1 cách chọn d.

Với mỗi cách chọn d ta có 6 cách chọn $a \in \{1,2,4,5,6,8\}$

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a,b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $1.6.5.4 = 120$ số.

Trường hợp 2: $d \neq 0 \Rightarrow d \in \{2,4,6,8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn d

Với mỗi cách chọn d, do $a \neq 0$ nên ta có 5 cách chọn $a \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{d\}$.

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a,b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $4.5.5.4 = 400$ số.

Vậy có tất cả $120 + 400 = 520$ số cần lập.

* **Cách 2:** Tính gián tiếp (đếm phần bù)

Gọi A = { số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8 }

B = { số các số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8 }

C = { số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8 }

Ta có: $|C| = |A| - |B|$.

Dễ dàng tính được: $|A| = 6.6.5.4 = 720$.

Ta đi tính $|B|$?

$x = \overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d \in \{1,5\} \Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

Với mỗi cách chọn d ta có 5 cách chọn a (vì $a \neq 0, a \neq d$)

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn b

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn c

Suy ra $|B| = 2.5.5.4 = 200$. Vậy $|C| = 520$.

Ví dụ 6. Cho tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.
2. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

Giải

Gọi $x = \overline{a_1 ... a_8}$ là số cần tìm

1. Vì x lẻ và không chia hết cho 5 nên $d \in \{1,3,7\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn

   Số các chọn các chữ số còn lại là: 7.6.5.4.3.2.1

   Vậy 15120 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Vì chữ số đứng đầu chẵn nên a_1 có 4 cách chọn, chữ số đứng cuối lẻ nên a_8 có 4 cách chọn. Các số còn lại có 6.5.4.3.2.1 cách chọn

   Vậy có $4^2.6.5.4.3.2.1 = 11520$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 7. Cho tập $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

1. Từ tập A ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau
2. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

Giải

1. Gọi số cần lập $x=\overline{abcd}$, $a,b,c,d\in\{0,1,2,3,4,5,6\};a\neq 0$

Chọn a : có 6 cách; chọn b,c,d có 6.5.4

Vậy có 720 số.

2. Gọi $x=\overline{abcde}$ là số cần lập, $e\in\{0,5\},a\neq 0$

- $e=0\Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn a,b,c,d : 6.5.4.3

Trường hợp này có 360 số.

- $e=5\Rightarrow e$ có một cách chọn, số cách chọn a,b,c,d : $5.5.4.3=300$

Trường hợp này có 300 số.

Vậy có 660 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8. Cho tập hợp số: $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

Giải

Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số chia hết cho 3. Trong tập A có các tập con các chữ số chia hết cho 3 là $\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,6\}$, $\{0,2,3,4\}$, $\{0,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,3,5,6\}$.

Vậy số các số cần lập là: $4(4!-3!)+3.4!=144$ số.

Ví dụ 9. Từ các số của tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

Giải

Vì có 3 số lẻ là 1,3,5, nên ta tạo được 6 cặp số kép: 13,31,15,51,35,53

Gọi A là tập các số gồm 4 chữ số được lập từ $X=\{0,13,2,4,6\}$.

Gọi A_1,A_2,A_3 tương ứng là số các số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập $X=\{0,13,2,4,6\}$ và 13 đứng ở vị trí thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

Ta có: $|A_1|=A_4^3=24;|A_2|=|A_3|=3.3.2=18$ nên $|A|=24+2.18=60$

Vậy số các số cần lập là: $6.60=360$ số.

Ví dụ 10. Từ các số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên ,mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa mãn điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

Giải

* **Cách 1:** Gọi $x=\overline{a_1a_2...a_6}$, $a_i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ là số cần lập

Theo bài ra ta có: $a_1+a_2+a_3+1=a_4+a_5+a_6$ (1)

Mà $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in\{1,2,3,4,5,6\}$ và đôi một khác nhau nên

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1+2+3+4+5+6=21$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $a_1+a_2+a_3=10$

Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1,a_2,a_3)=(1,3,6)$; $(1,4,5)$; $(2,3,5)$

Với mỗi bộ ta có $3!.3!=36$ số.

Vậy có cả thảy $3.36=108$ số cần lập.

* **Cách 2:** Gọi $x=\overline{abcdef}$ là số cần lập

Ta có: $\begin{cases}a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21\\ a+b+c=d+e+f+1\end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c=11$. Do $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$

Suy ra ta có các cặp sau: $(a,b,c)=(1,4,6)$; $(2,3,6)$; $(2,4,5)$

Với mỗi bộ như vậy ta có 3! cách chọn a,b,c và 3! cách chọn d,e,f

Do đó có: $3.3!.3!=108$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 11. Từ các số 1,2,3 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

1. Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng một lần
2. Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Giải

Đặt $A=\{1,2,3\}$. Gọi S là tập các số thỏa mãn yêu cầu thứ nhất của bài toán

Ta có số các số thỏa mãn điều kiện thứ nhất của bài toán là $\frac{6!}{2^3}=90$ (vì các số có dạng $\overline{aabbcc}$ và khi hoán vị hai số a,a ta được số không đổi)

Gọi S_1,S_2,S_3 là tập các số thuộc S mà có 1,2,3 cặp chữ số giống nhau đứng cạnh nhau.

- Số phần tử của S_3 chính bằng số hoán vị của 3 cặp 11,22,33 nên $|S_3|=6$
- Số phần tử của S_2 chính bằng số hoán vị của 4 phần tử là có dạng a,a,bb,cc nhưng a,a không đứng cạnh nhau. Nên $|S_2|=\frac{4!}{2}-6=6$ phần tử.

- Số phần tử của S_1 chính bằng số hoán vị của các phần tử có dạng a,a,b,b,cc nhưng a,a và b,b không đứng cạnh nhau nên $|S_1| = \frac{5!}{4} - 6 - 12 = 12$.

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $90 - (6 + 6 + 12) = 66$.

Ví dụ 12 Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

Giải

Đặt X là các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$A = \{$các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho 9$\}$

Với mỗi số thuộc A có m chữ số ($m \le 2008$) thì ta có thể bổ sung thêm $2011 - m$ số 0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9.

Do đó ta xét các số thuộc A có dạng $a_1a_2...a_{2011}$; $a_i \in \{0,1,2,3,...,9\}$

$A_0 = \{a \in A \mid$ mà trong a không có chữ số 9$\}$

$A_1 = \{a \in A \mid$ mà trong a có đúng 1 chữ số 9$\}$

- Ta thấy tập A có $1 + \frac{9^{2011} - 1}{9}$ phần tử
- Tính số phần tử của A_0

Với $x \in A_0 \Rightarrow x = \overline{a_1...a_{2011}}; a_i \in \{0,1,2,...,8\}$ $i = \overline{1,2010}$ và $a_{2011} = 9 - r$ với $r \in [1;9], r \equiv \sum_{i=1}^{2010} a_i$. Từ đó ta suy ra A_0 có 9^{2010} phần tử

- Tính số phần tử của A_1

Để lập số của thuộc tập A_1 ta thực hiện liên tiếp hai bước sau:

Bước 1: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0,1,2...,8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là 9^{2009}

Bước 2: Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 cách bổ sung số 9

Do đó A_1 có 2010.9^{2009} phần tử.

Vậy số các số cần lập là:

$$1 + \frac{9^{2011} - 1}{9} - 9^{2010} - 2010.9^{2009} = \frac{8 - 2010.9^{2010} + 8}{9}.$$

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1.

1. Bạn cần mua một áo sơ mi cỡ 30 hoặc 32. Áo cỡ 30 có 3 màu khác nhau, áo cỡ 32 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu cách lựa chọn?
2. Có 10 cuốn sách Toán khác nhau, 11 cuốn sách Văn khác nhau và 7 cuốn sách Anh văn khác nhau. Một học sinh được chọn một quyển sách trong các quyển sách trên. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn.
3. Có bao nhiêu cách xếp 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 8 cuốn sách Hóa lên một kệ sách sao cho các cuốn sách cùng một môn học thì xếp cạnh nhau, biết các cuốn sách đôi một khác nhau

Giải

1. Công việc ta cần thực hiện trong bài toán này là mua một chiếc ao sơ mi cỡ 30 hoặc 32. Để thực hiện công việc này ta có hai phương án.

   Phương án 1: Mua áo cỡ 30: Phương án này ta có 3 cách chọn (chọn một trong ba màu).

   Phương án 2: Mua áo cỡ 32: Phương án này ta có 4 cách chọn.

   Vậy ta có cả thảy $3 + 4 = 7$ cách lựa chọn.
2. Để chọn một cuốn sách trong những cuốn sách trên ta có các phương án sau.

   Phương án 1: Cuốn sách chọn là cuốn sách Toán: Ta có 10 cách chọn

   Phương án 2: Cuốn sách chọn là cuốn sách Văn: Ta có 11 cách chọn

   Phương án 3: Cuốn sách chọn là cuốn sách Anh văn: Ta có 7 cách chọn

   Vậy có $10 + 11 + 7 = 28$ cách lựa chọn.
3. Ta xếp các cuốn sách cùng một bộ môn thành một nhóm

   Trước hết ta xếp 3 nhóm lên kệ sách chúng ta có: $3! = 6$ cách xếp

   Với mỗi cách xếp 3 nhóm đó lên kệ ta có $5!$ cách hoán vị các cuốn sách Toán, $6!$ cách hoán vị các cuốn sách Lý và $8!$ cách hoán vị các cuốn sách Hóa

   Vậy theo quy tắc nhân có tất cả: $6.5!.6!.8!$ cách xếp.

Bài 2.

1. Có bao nhiêu cách xếp 4 người A,B,C,D lên 3 toa tàu, biết mỗi toa có thể chứa 4 người.
2. Trong một giải thi đấu bóng đá có 20 đội tham gia với thể thức thi đấu vòng tròn. Cứ hai đội thì gặp nhau đúng một lần. Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu xảy ra
3. Từ thành phố A có 10 con đường đi đến thành phố B, từ thành phố A có 9 con đường đi đến thành phố C, từ B đến D có 6 con đường, từ C đến D có 11 con đường và không có con đường nào nối B với C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D.

4. Hội đồng quản trị của công ty X gồm 10 người. Hỏi có bao nhiêu cách bầu ra ba người vào ba vị trí chủ tịch, phó chủ tịch và thư kí, biết khả năng mỗi người là như nhau.

Giải

1. Để xếp A ta có 3 cách lên một trong ba toa
   Với mỗi cách xếp A ta có 3 cách xếp B lên toa tàu
   Với mỗi cách xếp A,B ta có 3 cách xếp C lên toa tàu
   Với mỗi cách xếp A,B,C ta có 3 cách xếp D lên toa tàu
   Vậy có $3.3.3.3 = 81$ cách xếp 4 người lên toa tàu.
2. Cứ mỗi đội phải thi đấu với 19 đội còn lại nên có 19.20 trận đấu. Tuy nhiên theo cách tính này thì một trận đấu chẳng hạn A gặp B được tính hai lần.
   Do đó số trận đấu thực tế diễn ra là: $\frac{19.20}{2} = 190$ trận.
3. Để đi từ A đến D ta có các cách đi sau
   $A \to B \to D$: Có $10.6 = 60$ cách
   $A \to C \to D$: Có $9.11 = 99$ cách
   Vậy có tất cả 159 cách đi từ A đến D.
4. Chọn chủ tịch có 10 cách chọn, phó chủ tịch có 9 cách và thư kí có 8 cách. Do đó có tất cả $10.9.8 = 720$ cách chọn.

Bài 3.

1. Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho:
   a) Nam, nữ ngồi xen kẽ?
   b) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A, một người nữ B phải ngồi kề nhau?
   c) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam C, một người nữ D không được ngồi kề nhau?
2. Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi trong mỗi trường hợp sau:
   a) Bất kì 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường nhau.
   b) Bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

Giải

1. a) Có 6 cách chọn một người tuỳ ý ngồi vào chỗ thứ nhất. Tiếp đến, có 3 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 2. Lại có 2 cách chọn một người khác phái ngồi vào chỗ thứ 3, có 2 cách chọn vào chỗ thứ 4, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 5, có 1 cách chọn vào chỗ thứ 6.
   Vậy có : $6.3.2.2.1.1 = 72$ cách.

b) Cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ nhất và chỗ thứ hai, có 2 cách. Tiếp đến, chỗ thứ ba có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

Bây giờ, cho cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ hai và chỗ thứ ba. Khi đó, chỗ thứ nhất có 2 cách chọn, chỗ thứ tư có 2 cách chọn, chỗ thứ năm có 1 cách chọn, chỗ thứ sáu có 1 cách chọn.

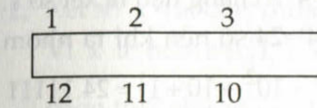
Tương tự khi cặp nam nữ A, B đó ngồi vào chỗ thứ ba và thứ tư, thứ tư và thứ năm, thứ năm và thứ sáu.

Vậy có : $5.2.2.2.1.1. = 40$ cách.

c) Số cách chọn để cặp nam nữ đó không ngồi kề nhau bằng số cách chọn tuỳ ý trừ số cách chọn để cặp nam nữ đó ngồi kề nhau.

Vậy có : $72 - 40 = 32$ cách.

2. Ta đánh số liên tiếp 12 chỗ ngồi bằng các số từ 1 đến 6 thuộc một dãy và từ 7 đến 12 thuộc một dãy



a)

Vị trí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cách xếp	12	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

Vậy có $12.6.5^2.4^2.3^2.2^2.1 = 1036800$ cách xếp.

b)

Vị trí	1	12	2	11	3	10	4	9	5	8	6	7
Số cách xếp	12	6	10	5	8	4	6	3	4	2	2	1

Vậy có: $12.6^2.10.5.8.4^2.3.2^2.1 = 33177600$ cách xếp.

Bài 4.

1. Cho các chữ số 1, 2, 3,..., 9. Từ các số đó có thể lập được bao nhiêu số?
   a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau.
   b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau và không vượt quá 2011.
2. Có 100000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.
3. Tính tổng các chữ số gồm 5 chữ số được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

Giải

1. Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$, $a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   a) Có $9.8.7.6 = 3024$ số

b) Vì x chẵn nên $d \in \{2,4,6,8\}$. Đồng thời $x \le 2011 \Rightarrow a = 1$

- $a = 1 \Rightarrow a$ có 1 cách chọn, khi đó d có 4 cách chọn; b,c có 7.6 cách

Suy ra có: $1.4.6.7 = 168$ số

2. Gọi số in trên vé có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

Số cách chọn a_1 là 10 (a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 9.

Số cách chọn a_3 là 8.

Số cách chọn a_4 là 7.

Số cách chọn a_5 là 6.

Vậy số vé gồm 5 chữ số khác nhau : $10.9.8.7.6 = 30240$.

3. Có 120 số có 5 chữ số được lập từ 5 chữ số đã cho.

Bây giờ ta xét vị trí của một chữ số trong 5 số 1, 2, 3, 4, 5 chẳng hạn ta xét số 1. Số 1 có thể xếp ở 5 vị trí khác nhau, mỗi vị trí có 4!=24 số nên khi ta nhóm các các vị trí này lại có tổng là : $24\left(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1\right)=24.11111$

Vậy tổng các số có 5 chữ số là : $24.11111(1+2+3+4+5)=5599944$.

Bài 5. Từ các số 1,2,3,4,5,6,7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là:

1. Số chẵn
2. Số lẻ
3. Số chia hết cho 5
4. Tổng hai chữ số đầu bằng tổng hai chữ số cuối.

Giải

Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$; $a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ và a,b,c,d đôi một khác nhau.

1. Công việc ta cần thực hiện là lập số x thỏa mãn x là số chẵn nên d phải là số chẵn. Do đó để thực hiện công việc này ta thực hiện qua các công đoạn sau:

Bước 1: Chọn d : Vì d là số chẵn nên d chỉ có thể là các số 2,4,6 nên d có 3 cách chọn.

Bước 2: Chọn a : Vì ta đã chọn d nên a chỉ có thể chọn một trong các số của tập $\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{d\}$ nên có 6 cách chọn a

Bước 3: Chọn b : Tương tự ta có 5 cách chọn b

Bước 4: Chọn c : Có 4 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có: $3.6.5.4 = 360$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Vì số x cần lập là số lẻ nên d phải là số lẻ. Ta lập x qua các công đoạn sau:

Bước 1: Có 4 cách chọn d *Bước 2:* Có 6 cách chọn a

Bước 3: Có 5 cách chọn b *Bước 4:* Có 4 cách chọn c

Vậy có 480 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Vì x chia hết cho 5 nên d chỉ có thể là 5 $\Rightarrow$ có 1 cách chọn d.

Có 6 cách chọn a, 5 cách chọn b và 4 cách chọn c.

Vậy có $1.6.5.4 = 120$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6. Cho tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1. Có bao nhiêu tập con của A chứa số 2 mà không chứa số 3
2. Từ các chữ số thuộc tập A, lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 5 chữ số không bắt đầu bởi 123.

Giải

1. Xét tập $B = \{1,4,5,6,7,8\}$, ta có B không chứa số 3.

X là một tập con của A thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi $X \setminus \{2\}$ là một tập con của B. Do đó, số tập con của A thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng số tập con của B và bằng $2^6 = 64$.

2. Xét số $x = \overline{abcde}$ được lập từ các chữ số thuộc tập A.

Vì x lẻ nên $e \in \{1,3,5,7\}$, suy ra có 4 cách chọn e. Bốn chữ số còn lại được chọn từ 7 chữ số của tập $A \setminus \{e\}$ nên có $A_7^4 = 840$ cách

Suy ra, có $4.840 = 3360$ số lẻ gồm năm chữ số khác nhau.

Mà số x bắt đầu bằng 123 có $A_5^2 = 20$ số.

Vậy số x thỏa mãn yêu cầu bài toán là : $3360 - 20 - 3340$ số.

Vấn đề 2. Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp

A. PHƯƠNG PHÁP

I. GIAI THỪA

a) **Định nghĩa:** Với mọi số tự nhiên dương n, tích 1.2.3....n được gọi là n giai thừa và kí hiệu n!. Vậy $n! = 1.2.3...n$.

Ta quy ước $0! = 1$.

b) **Tính chất:**

* $n! = n(n-1)!$

* $n! = n(n-1)(n-2)...(n-k-1).k!$

II. HOÁN VỊ

a) **Định nghĩa**: Cho tập A gồm n phần tử ($n \ge 1$). Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ta được một hoán vị các phần tử của tập A.

Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n.

b) **Số hoán vị của tập n phần tử:**

Định lí: Ta có $P_n = n!$

III. CHỈNH HỢP

a) Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.

b) Số chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử

Định lí: Ta có $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

IV. TỔ HỢP

a) Định nghĩa: Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A.

b) Số tổ hợp

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

Định lí: Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

B. BÀI TOÁN 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào công thức tổ hợp, chỉnh hợp hoán vị để chuyển phương trình, bất phương trình, hệ phương trình tổ hợp về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1.

1. Cho $C_n^{n-3} = 1140$. Tính $A = \dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$

2. Tính $B = \dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{A_n^2}$, biết $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + \ldots + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = 45$

3. Tính $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

Giải

1. ĐK: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 6 \end{cases}$. Ta có: $C_n^{n-3} = 1140 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 1140 \Leftrightarrow n = 20$

Khi đó: $A = \dfrac{(n-4)!}{(n-6)!} + \dfrac{(n-4)!}{(n-5)!} = \dfrac{16!}{14!} + \dfrac{16!}{15!} = 15.16 + 16 = 256$

2. Ta có: $C_n^1 = n$; $2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\dfrac{\dfrac{n!}{2!.(n-2)!}}{\dfrac{n!}{1!.(n-1)!}} = n - 1$;...; $n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \dfrac{1}{\dfrac{n!}{1!.(n-1)!}} = 1$

Nên $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + \ldots + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n = 10$

$B = \dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{A_n^2} = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{9}{10}$.

3. Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 3 \end{cases}$

Ta có: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\dfrac{(n+2)!}{2!n!} + 2\dfrac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \dfrac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = 149 \Leftrightarrow n = 5$

Do đó: $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

1. $P_x = 120$ 2. $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \ge 1 \end{cases}$

Ta có: $P_5 = 120$

- Với $x > 5 \Rightarrow P_x > P_5 = 120 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm
- Với $x < 5 \Rightarrow P_x < P_5 = 120 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy $x = 5$ là nghiệm duy nhất.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \ge 2 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow A_x^2(P_x - 6) - 12(P_x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow (P_x - 6)(A_x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P_x = 6 \\ A_x^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x! = 6 \\ x(x-1) = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Ví dụ 3. Tìm n biết:

1. $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + .. + nC_n^n = 256$

2. $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$

3. $C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - ... + (2n+1)2^n C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$.

Giải

1. Ta có: $kC_n^k.3^{n-k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}3^{n-k} = nC_{n-1}^{k-1}3^{n-k}$

Suy ra: $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k 3^{n-k} = n\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}3^{n-k} = n\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}3^{n-1-k} = n.4^{n-1}$

Suy ra $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + .. + nC_n^n = 256 \Leftrightarrow n.4^{n-1} = 4.4^3$

Từ đó ta tìm được $n = 4$.

2. Ta có $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n$ nên ta có $n = 5$

3. Đặt $S = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}.k.2^{k-1}C_{2n+1}^k$

Ta có: $(-1)^{k-1}.k.2^{k-1}C_{2n+1}^k == (-1)^{k-1}.(2n+1).2^{k-1}C_{2n}^{k-1}$

Nên $S = (2n+1)(C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 - ... + 2^{2n}C_{2n}^{2n}) = 2n+1$

Vậy $2n + 1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm số nguyên dương n sao cho:

1. $A_n^2 - A_n^1 = 8$ 2. $A_n^6 = 10A_n^5$ 3. $P_{n-1}.A_{n+4}^4 < 15P_{n+2}$.

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 2 \end{cases}$

Ta có $A_n^2 - A_n^1 = 8 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-1)!} = 8 \Leftrightarrow n(n-1) - n = 8$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow n = 4$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 6 \end{cases}$

Ta có: $A_n^6 = 10A_n^5 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-6)!} = 10\dfrac{n!}{(n-5)!} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{10}{n-5} \Leftrightarrow n = 15$.

3. Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 1 \end{cases}$

Ta có: $P_{n-1}.A_{n+4}^4 < 15P_{n+2} \Leftrightarrow (n-1)!\dfrac{(n+4)!}{n!} < 15(n+2)!$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+4)(n+3)}{n} < 15 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \Rightarrow n = 3,4,5$.

Bài 2. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên)

1. $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \dfrac{5}{2}A_n^2$ 2. $(n!)^3 C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n \le 720$

3. $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^2} \ge \dfrac{3}{10}n$.

Giải

1. Với $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$ ta có:

$C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \dfrac{5}{2}A_n^2 \Leftrightarrow C_{n+3}^n > \dfrac{5}{2}A_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(n+3)!}{n!3!} > \dfrac{5}{2}\dfrac{n!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow n\left(n^2 - 9n + 26\right) + 6 > 0$ luôn đúng với mọi $n \ge 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$.

2. Điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \ge 0$.

Với điều kiện đó, bất phương trình tương đương:

$(n!)^3 \dfrac{(2n)!}{n!n!}\dfrac{(3n)!}{(2n)!n!} \le 720 \Leftrightarrow (3n)! \le 720$

Ta thấy $(3n)!$ tăng theo n và mặt khác $6! = 720 \ge (3n)!$

Suy ra bất phương trình có nghiệm $n = 0,1,2$.

3. Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ge 2 \end{cases}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)n}{2} > \dfrac{10}{3}n\dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2 \le n \le 5$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1. $3C_{x+1}^2 + xP_2 = 4A_x^2$ 2. $\dfrac{5}{C_5^x} - \dfrac{2}{C_6^x} = \dfrac{14}{C_7^x}$

3. $C_x^2C_x^{x-2} + 2C_x^2C_x^3 + C_x^3C_x^{x-3} = 100$

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x\in \mathbb{N}\\ x\ge 2\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow 3.\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!}+2x=4\frac{x!}{(x-2)!}$

$\Leftrightarrow 3(x+1)x+4x=8x(x-1)\Leftrightarrow 3x+3+4=8x-8\Leftrightarrow x=3$.

2. Điều kiện $\begin{cases} x\in \mathbb{N}\\ x\le 5\end{cases}$

Ta có phương trình $\Leftrightarrow \frac{5.x!(5-x)!}{5!}-\frac{2.x!(6-x)!}{6!}=\frac{14.x!(7-x)!}{7!}$

$\Leftrightarrow 5-\frac{1}{3}(6-x)=\frac{1}{3}(6-x)(7-x)\Leftrightarrow x^2-14x+33=0\Leftrightarrow x=3$.

3. Điều kiện: $\begin{cases} x\in \mathbb{N}\\ x\ge 3\end{cases}$.

Ta có: $C_x^{x-2}=C_x^2$ và $C_x^{x-3}=C_x^3$ nên phương trình đã cho tương đương với:

$\left(C_x^2\right)^2+2C_x^2C_x^3+\left(C_x^3\right)^2=100\Leftrightarrow\left(C_x^2+C_x^3\right)^2=100\Leftrightarrow C_x^2+C_x^3=10$

$\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=10\Leftrightarrow x^3-x-60=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2+4x+15)=0\Leftrightarrow x=4$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1. $\begin{cases}2A_y^x+5C_y^x=90\\5A_y^x-2C_y^x=80\end{cases}$ 2. $\begin{cases}C_{x+1}^{y+1}=C_{x+1}^{y}\\3C_{x+1}^{y+1}=5C_{x+1}^{y-1}\end{cases}$

Giải

1. Điều kiện $x,y\in\mathbb{N};x\le y$

Ta có: $\begin{cases}2A_y^x+5C_y^x=90\\5A_y^x-2C_y^x=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_y^x=20\\C_y^x=10\end{cases}$

Từ $A_y^x=x!C_y^x$ suy ra $x!=\frac{20}{10}=2\Leftrightarrow x=2$

Từ $A_y^2=20\Leftrightarrow y(y-1)=20\Leftrightarrow y^2-y-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-4\text{ (loại)}\\y=5\end{array}\right.$

Vậy $x=2;y=5$.

2. Điều kiện $x,y\in\mathbb{N};x\ge y$

Ta có: $\begin{cases}C_{x+1}^{y+1}=C_{x+1}^{y}\\3C_{x+1}^{y+1}=5C_{x+1}^{y-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!}=\frac{(x+1)!}{y!(x-y+1)!}\\3\frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!}=5\frac{(x+1)!}{(y-1)!(x-y+2)!}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x-y+1}\\\frac{3}{y(y+1)}=\frac{5}{(x-y+1)(x-y+2)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\3(y+1)(y+2)=5y(y+1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\3y+6=5y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$ là nghiệm của hệ.

Bài 5. Giải bất phương trình sau: $\frac{P_{x+5}}{(x-k)!}\le 60A_{x+3}^{k+2}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}k,x\in\mathbb{N}\\k\le x\end{cases}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow(x+4)(x+5)(x+1-k)\le 60$

- $x\ge 4\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm
- $0\le x\le 4$ ta có các cặp nghiệm: $(x;k)=(0;0),(1;0),(1;1),(2;2),(3;3)$.

C. BÀI TOÁN 2: BÀI TOÁN ĐẾM

I. PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào hai quy tắc cộng, quy tắc nhân và các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Một số dấu hiệu giúp chúng ta nhận biết được hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp.

1. **Hoán vị:** Các dấu hiệu đặc trưng để giúp ta nhận dạng một hoán vị của n phần tử là:
   - Tất cả n phần tử đều phải có mặt
   - Mỗi phần tử xuất hiện một lần.
   - Có thứ tự giữa các phần tử.
2. **Chỉnh hợp:** Ta sẽ sử dụng khái niệm chỉnh hợp khi
   - Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần
   - k phần tử đã cho được sắp xếp thứ tự.
3. **Tổ hợp**: Ta sử dụng khái niệm tổ hợp khi
   - Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần
   - Không quan tâm đến thứ tự k phần tử đã chọn.

II. CÁC VÍ DỤ

LOẠI 1: ĐẾM SỐ

Ví dụ 1. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau?

Giải

Gọi A là số tự nhiên có hai chữ số lẻ khác nhau lấy từ các số 0,1,2,3,4,5,6 số cách chọn được A là $A_3^2=6$. Số chẵn có 5 chữ số mà hai số lẻ đứng kề nhau phải chứa A và ba trong 4 chữ số 0; 2; 4; 6.

Gọi $\overline{abcd}; a,b,c,d\in\{A,0,2,4,6\}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Trường hợp 1: Nếu $a=A$ có 1 cách chọn a và A_4^3 chọn b,c,d.

* Trường hợp 2: $a\neq A$ có 3 cách chọn a

+ Nếu $b=A$ có 1 cách chọn b và A_3^2 cách chọn c,d.

+ Nếu $c=A$ có 1 cách chọn c và A_3^2 cách chọn b,d.

Vậy có $A_3^2\left(A_4^3+3\left(1.A_3^2+1.A_3^2\right)\right)=360$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên

1. Gồm 4 chữ số

2. Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau

3. Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và là chữ số tự nhiên chẵn

4. Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bằng chữ số 1

5. Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau.

Giải

1. Gọi số cần lập là: $x=\overline{abcd}$. Ta chọn a,b,c,d theo thứ tự sau:

a : có 6 cách chọn

b : có 6 cách chọn

c : có 6 cách chọn

d : có 6 cách chọn

Vậy có $6^4=1296$ số.

2. Mỗi số cần lập ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử

Nên số cần lập là: $A_6^3=120$ số.

3. Gọi số cần lập là: $x=\overline{abcd}$

Vì x chẵn nên có 3 cách chọn d. Ứng với mỗi cách chọn d sẽ có A_5^3 cách chọn a,b,c. Vậy có $3.A_5^3=180$ số.

4. Gọi số cần lập là: $x=\overline{abcd}$

Vì $a\neq 1$ nên a có 5 cách chọn. Ứng với mỗi cách chọn a ta có: A_5^3 cách chọn b,c,d. Vậy có $5.A_5^3=300$ số.

5. Gọi x là số có 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số 1 và 2 luôn đứng cạnh nhau.

Đặt $y=12$ khi đó x có dạng $\overline{abcde}$ với a,b,c,d,e đôi một khác nhau và thuộc tập $\{y,3,4,5,6\}$ nên có $P_5=5!=120$ số.

Khi hoán vị hai số 1,2 ta được một số khác nên có $120.2=240$ số x.

Vậy số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $P_6-240=480$ số.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt hai lần, chữ số ba có mặt ba lần và các chữ số còn lại có mặt nhiều nhất một lần?

Giải

- Ta đếm các số có 7 chữ số được chọn từ các số $\{2,2,3,3,3,a,b\}$ với $a,b\in\{0,1,4,5,6,7,8,9\}$, kể cả số 0 đứng đầu.

Ta có được: 7! số như vậy. Tuy nhiên khi hoán vị hai số 2 cho nhau hoặc các số 3 cho nhau thì ta được số không đổi do đó có tất cả $\frac{7!}{2!.3!}=420$ số.

Vì có A_8^2 cách chọn a,b nên ta có: $420.A_8^2=23520$ số.

- Ta đếm các số có 6 chữ số được chọn từ các số $\{2,2,3,3,3,x\}$ với $x\in\{1,4,5,6,7,8,9\}$.

Tương tự như trên ta tìm được $\frac{6!}{2!.3!}A_7^1=420$ số

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán: 23100 số.

Ví dụ 4. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó, chữ số hàng ngàn lớn hơn hàng trăm, chữ số hàng trăm lớn hơn hàng chục và chữ số hàng chục lớn hơn hàng đơn vị.

Giải

Gọi $x=\overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $9\ge a_1>a_2>a_3>a_4\ge 0$ là số cần lập.

$X=\{0;\ 1;\ 2;\ ...;\ 8;\ 9\}$.

Từ 10 phần tử của X ta chọn ra 4 phần tử bất kỳ thì chỉ lập được 1 số A. Nghĩa là không có hoán vị hay là một tổ hợp chập 4 của 10.

Vậy có $C_{10}^4=210$ số.

Ví dụ 5. Từ các số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có, mỗi số có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số ở hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.

Giải

Gọi $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là một số thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $a_3+a_4+a_5=8$.

Có hai bộ 3 số có tổng bằng 8 trong các số 1,2,…,8,9 là: $\{1;2;5\}$ và $\{1;3;4\}$

Nếu $a_3;a_4;a_5\in\{1;2;5\}$ thì a_3,a_4,a_5 có 3! cách chọn và a_1,a_2,a_6 có A_6^3 cách chọn suy ra có $3!A_6^3=720$ số thỏa mãn yêu cầu.

Nếu $a_3;a_4;a_5\in\{1;2;5\}$ thì cũng có 720 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $720+720=1400$ số thỏa mãn yêu cầu

LOẠI 2: XẾP ĐỒ VẬT – PHÂN CÔNG CÔNG VIỆC

Ví dụ 1. Đội tuyển HSG của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 HS khối 12, 6 HS khối 11 và 5 HS khối10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 HS đi dự đại hội sao cho mỗi khối có ít nhất 1 HS được chọn

Giải

Số cách chọn 8 học sinh gồm hai khối là:

$C_{13}^8+C_{11}^8+C_{12}^8=1947$.

Số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán: $C_{18}^8-1947=41811$.

Ví dụ 2. Một cuộc họp có 13 người, lúc ra về mỗi người đều bắt tay người khác một lần, riêng chủ tọa chỉ bắt tay ba người. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

Giải

Số bắt tay 12 người (trừ chủ tọa): C_{12}^2

Vậy có: $C_{12}^2+3=69$ cái bắt tay.

Ví dụ 3. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 8 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.

Giải

Số cách chọn 8 học sinh gồm hai khối là:

$C_{13}^8+C_{11}^8+C_{12}^8=1947$.

Số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán: $C_{18}^8-1947=41811$

Ví dụ 4. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 câu (khó, dễ, trung bình) và số câu dễ không ít hơn 2?

Giải

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đề thi gồm 2 dễ, 2 trung bình , 1 khó: $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1$

Trường hợp 2: Đề thi gồm 2 dễ, 1 trung bình, 2 khó: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2$

Trường hợp 3: Đề thi gồm 3 dễ, 1 trung bình, 1 khó: $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1$

Vậy có: 56875 đề kiểm tra.

Ví dụ 5. Hai nhóm người cần mua nền nhà, nhóm thứ nhất có 2 người và họ muốn mua 2 nền kề nhau, nhóm thứ hai có 3 người và họ muốn mua 3 nền kề nhau. Họ tìm được một lô đất chia thành 7 nền đang rao bán (các nền như nhau và chưa có người mua). Tính số cách chọn nền của mỗi người thỏa mãn yêu cầu trên.

Giải

Xem lô đất có 4 vị trí gồm 2 vị trí 1 nền, 1 vị trí 2 nền và 1 vị trí 3 nền.

- Bước 1: nhóm thứ nhất chọn 1 vị trí cho 2 nền có 4 cách và mỗi cách có: $2!=2$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $4.2=8$ cách chọn nền.
- Bước 2: nhóm thứ hai chọn 1 trong 3 vị trí còn lại cho 3 nền có 3 cách và mỗi cách có $3!=6$ cách chọn nền cho mỗi người.

  Suy ra có $3.6=18$ cách chọn nền.

Vậy có $8.18=144$ cách chọn nền cho mỗi người.

Ví dụ 6. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Giải

- Chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.
- Chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

+) chọn 1 nữ và 2 nam có $5.C_{13}^2$ cách.

+) chọn 2 nữ và 1 nam có $13.C_5^2$ cách.

+) chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2\left(5.C_{13}^2+13.C_5^2+C_5^3\right)=111300$ cách.

Ví dụ 7. Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

*** Cách 1:** Ta có các trường hợp sau:

- 3 người được chọn gồm 1 nữ và 2 nam.

Chọn ra 1 trong 3 nữ ta có 3 cách.

Chọn ra 2 trong 5 nam ta có C_5^2 cách

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn

- 3 người được chọn gồm 2 nữ và 1 nam.

Chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

Chọn ra 1 trong 5 nam có 5 cách.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

- 3 người chọn ra gồm 3 nữ có 1 cách.

Vậy có $3C_5^2+5C_3^2+1=46$ cách chọn.

*** Cách 2:** Số cách chọn 3 người bất kì là: C_8^3

Số cách chọn 3 người nam cả là: C_5^3

Vậy số cách chọn 3 người thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_8^3-C_5^3=46$ cách.

Ví dụ 8. Một lớp có 33 học sinh, trong đó có 7 nữ. Cần chia lớp thành 3 tổ, tổ 1 có 10 học sinh, tổ 2 có 11 học sinh, tổ 3 có 12 học sinh sao cho trong mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy?

Giải

Số cách chia lớp thành 3 tổ thỏa mãn yêu cầu có 3 trường hợp:

* **Trường hợp 1**: Tổ 1 có 3 nữ, 7 nam có $C_7^3C_{26}^7$ cách chọn

Tổ 2 có 2 nữ, 9 nam có $C_4^2C_{19}^9$ cách chọn

Tổ 3 có 2 nữ, 10 nam có $C_2^2C_{10}^{10}=1$ cách chọn

Vậy có $C_7^3C_{26}^7\ C_4^2C_{19}^9$ cách chia thành 3 tổ trong trường hợp này.

* **Trường hợp 2**: Tổ 2 có 3 nữ và hai tổ còn lại có 2 nữ, tương tự tính được $C_7^2C_{26}^8C_5^3C_{18}^8$ cách chia.

* **Trường hợp 3**: Tổ 3 có 3 nữ và hai tổ còn lại có 2 nữ, tương tự tính được $C_7^2C_{26}^8C_5^2C_{18}^9$ cách chia.

Vậy có tất cả $C_7^3C_{26}^7\ C_4^2C_{19}^9+C_7^2C_{26}^8C_5^3C_{18}^8+C_7^2C_{26}^8C_5^2C_{18}^9$ cách chia.

Ví dụ 9. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

Giải

* *Loại 1:* chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách.

* *Loại 2:* chọn 10 câu có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.

+) Chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} cách.

+) Chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách.

+) Chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách.

Vậy có $C_{20}^{10}-\left(C_{16}^{10}+C_{13}^{10}+C_{11}^{10}\right)=176451$ đề kiểm tra.

Ví dụ 10. Một thầy giáo có 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Văn và 7 cuốn sách anh văn và các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy giáo muốn tặng 6 cuốn sách cho 6 học sinh. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng nếu:

1. Thầy giáo chỉ muốn tặng hai thể loại.
2. Thầy giáo muốn sau khi tặng xong mỗi thể loại còn lại ít nhất một cuốn.

Giải

1. Tặng hai thể loại Toán, Văn có: A_{11}^6 cách

Tặng hai thể loại Toán, Anh Văn có: A_{12}^6 cách

Tặng hai thể loại Văn, Anh Văn có: A_{13}^6 cách

Số cách tặng: $A_{11}^6+A_{12}^6+A_{13}^6=2233440$.

2. Số cách tặng hết sách Toán: $5!.13 = 1560$

Số cách tặng hết sách Văn: $6! = 720$

Số cách tặng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $A_{18}^6 - 1560 - 720 = 13363800$.

Ví dụ 11. Trong một lớp học có 20 học sinh nữ và 15 học sinh nam. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn:

1. Ba học sinh làm ban cán sự lớp
2. Ba học sinh làm ba nhiệm vụ lớp trưởng, lớp phó và bí thư
3. Ba học sinh làm ban cán sự trong đó có ít nhất một học sinh nữ
4. Bốn học sinh làm tổ trưởng của 4 tổ sao cho trong 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Giải

1. Số cách chọn ban cán sự: $C_{35}^3 = 6545$

2. Số cách chọn 3 học sinh làm lớp trưởng, lớp phó và bí thư là $A_{35}^3 = 39270$.

3. Số cách chọn ba học sinh làm ban cán sự mà không có nữ được chọn là: $C_{15}^3 = 455$

Số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán: $C_{35}^3 - C_{15}^3 = 6090$.

4. Số cách chọn 4 học sinh làm 4 tổ trưởng là: A_{35}^4

Số cách chọn 4 học sinh làm tổ trưởng trong đó không có học sinh nam được chọn là: A_{20}^4

Số cách chọn 4 học sinh làm tổ trưởng trong đó không có học sinh nữ được chọn là: A_{15}^4

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán: $A_{35}^4 - \left(A_{20}^4 + A_{15}^4\right) = 1107600$.

Ví dụ 12. Có 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi 1 khác nhau) người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông.

1. Có bao nhiêu cách chọn các bông hoa được chọn tuỳ ý?
2. Có bao nhiêu cách chọn sao cho có đúng 1 bông màu đỏ?
3. Có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ?

Giải

1. Mỗi cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán có nghĩa là ta lấy bất kì 7 bông từ 10 bông đã cho mà không tính đến thứ tự lấy. Do đó mỗi cách lấy là một tổ hợp chập 7 của 10 phần tử

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_{10}^7 = 120$.

2. Có 4 cách chọn 1 bông hồng màu đỏ

Với mỗi cách chọn bông hồng màu đỏ, có 1 cách chọn 6 bông còn lại

Vậy có tất cả 4 cách chọn bông thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Vì có tất cả 4 bông hồng đỏ nên ta có các trường hợp sau:

- 7 bông được chọn gồm 3 bông vàng và 4 bông đỏ

  Số cách chọn trong trường hợp này là 1 cách

- 7 bông được chọn gồm 3 bông vàng, 3 bông đỏ và 1 bông trắng

  Số cách chọn trong trường hợp này là $3.C_4^3 = 12$ cách

Vậy có tất cả 13 cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

LOẠI 3: ĐẾM TỔ HỢP LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC

Ví dụ: Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói trên?

Giải

Số tam giác lập được thuộc vào một trong hai loại sau:

Loại 1: Gồm hai đỉnh thuộc vào d_1 và một đỉnh thuộc vào d_2

Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 : C_{10}^2

Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{15}^1

Loại này có: $C_{10}^2.C_{15}^1$ tam giác.

Loại 2: Gồm một đỉnh thuộc vào d_1 và hai đỉnh thuộc vào d_2

Số cách chọn một điểm trong 10 điểm thuộc d_1 : C_{10}^1

Số cách chọn bộ hai điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{15}^2

Loại này có: $C_{10}^1.C_{15}^2$ tam giác.

Vậy có tất cả: $C_{10}^2 C_{15}^1 + C_{10}^1 C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Từ các số của tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

1. Năm chữ số đôi một khác nhau.
2. Sáu chữ số khác nhau và chia hết cho 5.
3. Năm chữ số đôi một khác nhau, đồng thời hai chữ số 2 và 3 luôn đứng cạnh nhau.
4. Bảy chữ số, trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần.

Giải

1. Mỗi số cần lập thỏa mãn yêu cầu bài toán sẽ ứng với mỗi chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử. Do đó, có $A_7^5 = 2520$.

2. Gọi số cần lập là $x = a_1a_2...a_6$

   Vì x chia hết cho 5 nên $a_6 = 5 \Rightarrow a_6$ có một cách chọn.

   Số cách chọn các chữ số $a_1, a_2, ..., a_5$ chính bằng số chỉnh hợp chập 5 của 6 phần tử và bằng A_6^5

   Vậy số các số cần lập là $1.A_6^5 = 720$.

3. Đặt $x = 23$. Số các số cần lập có dạng $\overline{abcd}$ với $a,b,c,d \in \{1,x,4,5,6,7\}$.

   Có $A_6^4 = 360$ số như vậy.

   Mặt khác khi hoán vị hai số 2 và 3 ta được thêm một số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

   Vậy có $360.2 = 720$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. Xét các số tự nhiên có bảy chữ số được lập từ $\{1,2,2,2,3,4,5,6,7\}$

   Ta thấy có A_9^7 số như vậy.

   Tuy nhiên khi hoán vị vị trí của ba số 2 cho nhau thì số thu được không thay đổi. Vậy có $\frac{A_9^7}{3!} = 30240$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. Từ các chữ số của tập hợp $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

1. 5 chữ số.
2. 4 chữ số đôi một khác nhau.
3. 4 chữ số đôi một khác nhau và là số lẻ.
4. 5 chữ số đôi một khác nhau và là số chẵn.

Giải

1. Gọi $x = abcde$ với $a,b,c,d,e \in A; a \neq 0$

   Để lập x ta chọn các số a,b,c,d,e theo tứ thự sau

   Chọn a: Vì $a \in A, a \neq 0$ nên ta có 6 cách chọn a

   Vì $b \in A$ và b có thể trùng với a nên với mỗi cách chọn a ta có 7 cách chọn b

   Tương tự: Với mỗi cách chọn a,b có 7 cách chọn c

   Với mỗi cách chọn a,b,c có 7 cách chọn d

   Với mỗi cách chọn a,b,c,d có 7 cách chọn e

   Vậy theo quy tắc nhân ta có: $6.7.7.7.7 = 14406$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Gọi $x = abcd$ là số cần lập với $a,b,d,c \in A$ đôi một khác nhau và $a \neq 0$.

   Ta chọn a,b,c,d theo thứ tự sau

   Chọn a: Vì $a \in A, a \neq 0$ nên có 6 cách chọn a

   Với mỗi cách chọn a ta thấy mỗi cách chọn b,c,d chính là một cách lấy ba phần tử của tập $A \setminus \{a\}$ và xếp chúng theo thứ tự, nên mỗi cách chọn b,c,d ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử.

   Suy ra số cách chọn b,c,d là: A_6^3

   Theo quy tắc nhân ta có: $6.A_6^3 = 720$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số cần lập với $a,b,c,d \in A$ đôi một khác nhau, $a \neq 0$.

   Vì x là số lẻ nên $d \in \{1,3,5\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn.

   Với mỗi cách chọn d ta có $a \in A \setminus \{0,d\} \Rightarrow a$ có 5 cách chọn

   Với mỗi cách chọn a,d ta có A_5^2 cách chọn bc

   Theo quy tắc nhân ta có: $3.5.A_5^2 = 300$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4. Gọi $x = \overline{abcde}$ là số cần lập với $a,b,c,d,e \in A$ đôi một khác nhau và $a \neq 0$.

   Vì x là số lẻ nên $e \in \{0,2,4,6\}$. Ta xét các trường hợp sau

   - $e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn

   Vì $a \neq 0 \Rightarrow a$ có 6 cách chọn

   Số cách chọn các chữ số còn lại: A_5^3

   Do đó trường hợp này có tất cả $1.6.A_5^3 = 360$ số.

   - $e \neq 0 \Rightarrow e$ có 3 cách chọn

   Với mỗi cách chọn e ta có $a \in A \setminus \{0,e\} \Rightarrow a$ có 5 cách chọn

   Số cách chọn các số còn lại là: A_5^3

   Do đó trường hợp này có tất cả $3.5.A_5^3 = 900$ số

   Vậy có cả thảy $360 + 900 = 1260$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3. Một lớp học có 20 nam và 26 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một ban cán sự gồm 3 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu

1. Trong ban cán sự có ít nhất một nam
2. Trong ban cán sự có cả nam và nữ.

Giải

Có C_{46}^3 cách chọn ba học sinh trong lớp

1. Có C_{26}^3 cách chọn ban cán sự không có nam (ta chọn nữ cả)

   Do đó, có $C_{46}^3 - C_{26}^3 = 12580$ cách chọn ban cán sự trong đó có ít nhất một nam được chọn.

2. Có C_{26}^3 cách chọn ban cán sự không có nam

   Có C_{20}^3 cách chọn ban cán sự không có nữ.

   Vậy có $C_{46}^3 - (C_{26}^3 + C_{20}^3) = 11440$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4.

1. Một thầy giáo có 10 cuốn sách Toán đôi một khác nhau, trong đó có 3 cuốn Đại số, 4 cuốn Giải tích và 3 cuốn Hình học. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 học sinh sao cho sau khi tặng mỗi loại sách còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng.
2. Đội thanh niên xung kích có của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong ba lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Giải

1. Số cách lấy 5 cuốn sách và đem tặng cho 5 học sinh: $S = A_{10}^5 = 30240$ cách.

   Số cách chọn sao cho không còn sách Đại số: $S_1 = C_7^2.5! = 2520$ cách

   Số cách chọn sao cho không còn sách Giải tích: $S_2 = C_6^1.5! = 720$ cách

   Số cách chọn sao cho không còn sách Hình học: $S_3 = C_7^2.5! = 2520$ cách.

   Vậy số cách tặng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $S - S_1 - S_2 - S_3 = 24480$ cách tặng.

2. **Trường hợp 1:** 4 học sinh được chọn thuộc một lớp:
   - A: có $C_5^4 = 5$ cách chọn
   - B: có $C_4^4 = 1$ cách chọn

   Trường hợp này có: 6 cách chọn.

   Trường hợp 2: 4 học sinh được chọn thuộc hai lớp:
   - A và B: có $C_9^4 - (C_5^4 + C_4^4) = 120$
   - B và C: có $C_9^4 - C_4^4 = 125$
   - C và A: có $C_9^4 - C_5^4 = 121$

   Trường hợp này có 366 cách chọn.

   Vậy có 372 cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 5. Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi:

1. Có bao nhiêu véc tơ thuộc 2010 điểm đã cho.
2. Có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó thuộc vào 2010 điểm đã cho.

Giải

1. Mỗi véc tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010, nên số véc tơ cần tìm là: A_{2010}^2.
2. Mỗi tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một tổ hợp chập 3 của 2010, nên số tam giác cần tìm là: C_{2010}^3.

Bài 6.

1. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \ge 2$). Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Tìm n?
2. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n?

Giải

1. Tam giác cần lập thuộc hai loại

   Loại 1: Tam giác có một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2. Loại này có $C_{10}^1.C_n^2$ tam giác.

   Loại 2: Tam giác có một đỉnh thuộc d_2 và hai đỉnh thuộc d_1. Loại này có $C_{10}^2.C_n^1$ tam giác.

   Theo bài ra ta có: $C_{10}^1.C_n^2 + C_{10}^2.C_n^1 = 2800$

   $\Leftrightarrow 10\frac{n(n-1)}{2} + 45n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow n = 20$.

2. Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là: C_{2n}^3.

   Ta thấy ứng với hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho tương ứng hai đường chéo đi qua tâm O của đa giác. Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n điểm bằng C_n^2.

   Theo giả thiết: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$.

Bài 7. Có m nam và n nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra k người trong đó có ít nhất a nam và ít nhất b nữ $(k \le m, n; a + b < k; a, b \ge 1)$?

Giải

Số cách chọn k người trong $m + n$ người là C_{m+n}^{k}

* Số cách chọn có ít hơn a nam là: $S_1 = \sum\limits_{i=0}^{a-1} C_m^{a-i-1}.C_n^{k-a+i-1}$

* Số cách chọn có ít hơn b nữ là: $S_2 = \sum\limits_{i=0}^{b-1} C_n^{b-i-1}.C_m^{k-b+i+1}$

Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^{k} - (S_1 + S_2)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n - 1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?

Giải

Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

Do đó có $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại:

* Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm

* Qua A_1, A_2, A_3 có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau, nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$.

* Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

Bài 9. Một ban thanh tra có n người, họ bảo quản tài liệu mật trong tủ sắt. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu ổ khoá, mỗi ổ cần có bao nhiêu chìa và phải chia số chìa khoá này như thế nào để tủ sắt chỉ có thể mở được khi có ít nhất m người trong họ có mặt ($m < n$)?

Giải

- Vì chỉ có mặt ít nhất m người mới mở được khoá, nên với nhóm $m - 1$ người bất kì luôn có ít nhất một ổ khoá tương ứng mà họ không mở được và hai nhóm $m - 1$ người khác nhau thì ổ khoá tương ứng không mở được khác nhau, vì nếu ngược lại thì ta nhóm hai nhóm này lại ta được một nhóm có ít nhất m người nhưng họ không mở được khoá, do vậy số ổ khoá ít nhất là C_n^m ổ khoá.
- Một nhóm $m - 1$ người thì có ít nhất một ổ mà họ không có chìa và $n - m + 1$ người còn lại mỗi người đều phải có chìa khoá của ổ này nên có $(n - m + 1)C_n^m$ chìa khoá.
- Bây giờ ta chia chìa khoá như sau: Với bộ $m - 1$ người ta cho ứng với một ổ khoá và $n - m$ chìa của ổ này ta chia cho $n - m + 1$ người còn lại, khi đó với bộ $m - 1$ người bất kì sẽ không mở được vì có một ổ họ không có chìa, ta gọi ổ này là K và với m người luôn mở được khoá vì chìa của ổ K do người mới thêm vào giữ.

Bài 10. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Giải

Có $C_{12}^4.C_3^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_8^4.C_2^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_4^4.C_1^1$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Vậy số cách phân công thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$C_{12}^4C_3^1.C_8^4C_2^1.C_4^4C_1^1 = 207900.$$

Bài 11. Có 7 nhà toán học nam, 4 nhà toán học nữ và 5 nhà vật lý nam. Có bao nhiêu cách lập đoàn công tác gồm 3 người có cả nam và nữ đồng thời có cả toán học và vật lý?

Giải

Ta có các khả năng sau:

- Đoàn công tác gồm: 1 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý và 1 nhà toán học nam

Số cách chọn: $C_7^1.C_4^1.C_5^1 = 140$ cách

- Đoàn công tác gồm: 1 nhà toán học nữ, 2 nhà vật lý

Số cách chọn: $C_4^1.C_5^2 = 40$ cách

- Đoàn công tác gồm: 2 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý

Số cách chọn: $C_4^2.C_5^1 = 30$ cách

Vậy số cách lập là: 210 cách.

Bài 12.

1. Có bao nhiêu cách xếp n người ngồi vào một bàn tròn.
2. Một hội nghị bàn tròn có các phái đoàn 3 người Anh, 5 người Pháp và 7 người Mỹ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người có cùng quốc tịch thì ngồi gần nhau.

Giải

1. Nếu xếp một người ngồi vào một vị trí nào đó thì ta có 1 cách xếp và $n-1$ người còn lại được xếp vào $n-1$ vị trí còn lại nên có $(n-1)!$ cách xếp.
Vậy có tất cả $(n-1)!$ cách xếp.
2. Có 2! cách xếp 3 phái đoàn vào bàn tròn. Với mỗi cách xếp thì có:
3! cách xếp các thành viên phái đoàn Anh
5! cách xếp các thành viên phái đoàn Pháp
7! cách xếp các thành viên phái đoàn Mỹ
Vậy có tất cả: $2!3!5!7! = 7257600$ cách xếp.

Bài 13. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $C_{2n}^n = (2n)^k$, trong đó k là một ước nguyên tố của C_{2n}^n.

Giải

Giả sử p là một ước nguyên tố của C_{2n}^n và m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn C_{2n}^n. Ta chứng minh: $p^m \le 2n$

Giả sử $p^m > 2n \Rightarrow \left[\dfrac{2n}{p^m}\right] = 0$

Và $m = \left(\left[\dfrac{2n}{p}\right] - 2\left[\dfrac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\dfrac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\dfrac{n}{p^2}\right]\right) + \ldots + \left(\left[\dfrac{2n}{p^{m-1}}\right] - 2\left[\dfrac{n}{p^{m-1}}\right]\right)$

Mặt khác: $2[x] + 2 > 2x \ge [2x] \Rightarrow [2x] - 2[x] \le 1$

Do đó: $m \le \underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-1\ \text{số}} = m-1$ vô lí

Từ đó suy ra $C_{2n}^n = (2n)^k \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ C_{2n}^n = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 1 \end{cases}$.

Bài 14. Cho S là tập các số nguyên trong đoạn $[1;2002]$ và T là tập hợp các tập con khác rỗng của S. Với mỗi $X \in T$, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X. Tính $m = \dfrac{\sum\limits_{X\in T} m(X)}{|T|}$.

Giải

Với mỗi $k \in \{1,2,\ldots,2002\}$ ta đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây lấy tổng theo $X \in T$ mà $|X| = k$.

Xét phần tử a bất kì ta có a thuộc vào C_{2001}^{k-1} tập con $X \in T$ mà $|X| = k$.

Do đó: $km_k = (1+2+\ldots+2002)C_{2001}^{k-1} = 2001.2001.C_{2001}^{k-1}$

Suy ra $\sum\limits_{X\in T} m(X) = \sum\limits_{k=1}^{2002} m_k = 1001.2003.\sum\limits_{k=1}^{2002}\dfrac{C_{2001}^{k-1}}{k} = \dfrac{2003\left(2^{2002}-1\right)}{2}$

Mặt khác $|T| = 2^{2002} - 1$, do đó: $m = \dfrac{2003}{2}$.

D. BÀI TOÁN 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỔ HỢP

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên k $(1 \le k \le n-1)$ sao cho $\dfrac{a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k}{9} = \dfrac{a_{k+1}}{24}$. Tính $n = ?$.

Giải

Ta có: $a_k = C_n^k$, suy ra hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{1}{9}\dfrac{n!}{(n-k)!k!} \\ \dfrac{1}{9}\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{1}{24}\dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9k = 2(n-k+1) \\ 24(k+1) = 9(n-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 11k = -2 \\ 9n - 33k = 24 \end{cases} \Leftrightarrow n = 10, k = 2$.

Ví dụ 2. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \ldots, a_n$, biết các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn hệ thức: $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$.

Giải

Đặt $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

$$\Rightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n \Rightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

Với mọi $k \in \{0,1,2,...,11\}$ ta có: $a_k = 2^kC_{12}^k$, $a_{k+1} = 2^{k+1}C_{12}^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2^kC_{12}^k}{2^{k+1}C_{12}^{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(12-k)} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$

Mà $k \in Z \Rightarrow k \le 7$. Do đó $a_0 < a_1 < ... < a_8$

Tương tự: $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7 \Rightarrow a_8 > a_9 > ... > a_{12}$

Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_{12}$ là $a_8 = 2^8C_{12}^8 = 126720$.

Ví dụ 3. Cho một tập hợp A gồm n phần tử ($n \ge 4$). Biết số tập con gồm 4 phần tử của A gấp 20 lần số tập con gồm hai phần tử của A

1. Tìm n.
2. Tìm $k \in \{1,2,3,...,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của tập A là lớn nhất.

Giải

1. Số tập con gồm 4 phần tử của tập A: C_n^4

Số tập con gồm 2 phần tử của tập A: C_n^2

Theo bài ra ta có: $C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20\frac{n!}{2!(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4!} = \frac{10}{(n-2)(n-3)} \Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18$$

Vậy tập A có 18 phần tử.

2. Giả sử C_{18}^k là số tập con lớn nhất của A. Khi đó:

$$\begin{cases} C_{18}^k \ge C_{18}^{k-1} \\ C_{18}^k \ge C_{18}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18!}{k!(18-k)!} \ge \frac{18!}{(k-1)!(19-k)!} \\ \frac{18!}{k!(18-k)!} \ge \frac{18!}{(k+1)!(17-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k} \ge \frac{1}{19-k} \\ \frac{1}{18-k} \ge \frac{1}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \le \frac{19}{2} \\ k \ge \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 9$$

Vậy số tập con gồm 9 phần tử của A là số tập con lớn nhất.

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Trong khai triển của $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x)^{10}$ thành đa thức

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, hãy tìm hệ số a_k lớn nhất ($0 \le k \le 10$).

Giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{15-k}\left(\frac{2}{3}x\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k\frac{2^k}{3^{15}}x^k$$

Hệ số của x^k trong khai triển $a_k = \frac{1}{3^{15}}C_{15}^k2^k$

Ta có: $a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1}2^{k-1} < C_{15}^k2^k \Leftrightarrow C_{15}^{k-1} < 2C_{15}^k$

$\Leftrightarrow k < \frac{32}{3} \Rightarrow k \le 10$. Từ đó: $a_0 < a_1 < ... < a_{10}$

Đảo dấu bất đẳng thức trên, ta được:

$$a_{k-1} < a_k \Leftrightarrow k > \frac{32}{3} \Rightarrow a_{10} > a_{11} > ... > a_{15}$$

Vậy hệ số lớn nhất phải tìm là: $a_{10} = \frac{2^{10}}{3^{15}}C_{15}^{10} = 3003\frac{2^{10}}{3^{15}}$.

Bài 2. Giả sử $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, biết rằng $a_0 + a_1 + ... + a_n = 729$.

Tìm n và số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

Giải

Ta có: $a_0 + a_1 + ... + a_n = (1+2.1)^n = 3^n = 729 \Rightarrow n = 6$

$a_k = C_6^k2^k$ suy ra $\max\{a_k\} = a_4 = 240$.

E. BÀI TOÁN 4: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

I. PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào các công thức hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

* $P_n = n!$
* $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $1 \le k \le n$
* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$
* $n! = n(n-1)(n-2)...(n-k-1).(n-k)!$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

1. $C_n^k+3C_n^{k+1}+3C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}$ với $n\in\mathbb{N}^*, 0\le k\le n-3$
2. $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^{n}$ với $n,k\in\mathbb{N}^*, k\ge 2$

Giải

1. Ta có: $C_n^k+C_n^{k-1}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)}$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

Áp dụng kết quả trên ta có:

VT $=(C_n^k+C_n^{k+1})+2(C_n^{k+1}+C_n^{k+2})+(C_n^{k+2}+C_n^{k+3})$

$$=C_{n+1}^{k+1}+2C_{n+1}^{k+2}+C_{n+1}^{k+3}=(C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2})+(C_{n+1}^{k+2}+C_{n+1}^{k+3})$$

$=C_{n+2}^{k+2}+C_{n+2}^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}=$ VP.

2. Ta có: $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}+\dfrac{(n+k)!}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)$

$$=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}\frac{k}{k-1}=k^2\frac{(n+k)!}{k!}=k^2A_{n+k}^{n}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

1. $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k$ với $4\le k\le n$
2. $P_k.A_{n+1}^2.A_{n+3}^2.A_{n+5}^2=nk!A_{n+5}^5$
3. $C_n^0C_n^k+C_n^1C_{n-1}^{k-1}+...+C_n^kC_{n-k}^0=2^kC_n^k$.

Giải

1. Ta có: VT $=\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)+3\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+3\left(C_n^{k-2}+C_n^{k-3}\right)+\left(C_n^{k-3}+C_n^{k-4}\right)$

$$=C_{n+1}^k+3C_{n+1}^{k-1}+3C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}=C_{n+4}^k.$$

2. Ta có: VT $=k!\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}.\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}.\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}=k!\dfrac{(n+5)!}{(n-1)!}=nk!A_{n+5}^5.$

3. Ta có: $C_n^mC_{n-m}^{k-m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}.\dfrac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}=\dfrac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}$

$$=\frac{k!}{m!(k-m)!}.\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_k^m.C_n^k$$

Suy ra: $\displaystyle\sum_{m=0}^{k}C_n^mC_{n-m}^{k-m}=\sum_{m=0}^{k}C_k^mC_n^k=C_n^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m=2^kC_n^k.$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

1. $A_n^k-A_{n-1}^k=k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n,k\in\mathbb{N}^*, n\ge 2, k\le n-1$
2. $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{C_n^k}$ với $n,k\in\mathbb{N}^*$, $k\le n$.

Giải

1. Ta có: $A_n^k-A_{n-1}^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}-\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(\frac{n}{n-k}-1\right)=k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}=kA_{n-1}^{k-1}$$

2. Ta có: $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{k!(n+1-k)!+(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$=\frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k)+(k+1)\right]$$

$$=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_n^k}.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

1. $C_n^1...C_n^{n-1}\le\left(\dfrac{2^n-1}{n}\right)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$
2. $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n\le\left(C_{2n}^n\right)^2$ với $\forall n,k\in\mathbb{Z}$ và $0\le k\le n$.

Giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số, ta có:

$$C_n^0C_n^1...C_n^{n-1}\le\left(\frac{C_n^0+C_n^1+...+C_n^{n-1}+C_n^n-C_n^n}{n}\right)^n=\left(\frac{2^n-1}{n}\right)^n$$

2. Ta đặt $a_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \Rightarrow \begin{cases} a_k = \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ a_{k+1} = \dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)}.\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \end{cases}$

Để chứng minh BĐT trên ta chứng minh $a_k > a_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le n$

Ta có: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} > \dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)}.\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n-k}{n-k} > \dfrac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{n}{n-k} > 1 + \dfrac{n}{n+k+1}$ (đúng).

$\Rightarrow a_0 > a_1 > ... > a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_0 > a_k \Rightarrow C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$.

Ví dụ 5. Tính tổng $S = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n$, biết số tự nhiên n thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^3 - \frac{1}{8}C_n^4 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{4024}.$$

Giải

Đặt $S_1 = \dfrac{1}{2}C_n^0 - \dfrac{1}{4}C_n^1 + \dfrac{1}{6}C_n^3 - \dfrac{1}{8}C_n^4 + ... + \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n$

Ta có: $S_1 = \dfrac{1}{2}\left(C_n^0 - \dfrac{1}{2}C_n^1 + \dfrac{1}{3}C_n^2 - ... + \dfrac{(-1)^n}{n+1}C_n^n\right)$

Do $\dfrac{(-1)^k}{k+1}C_n^k = \dfrac{(-1)^k}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ nên ta suy ra:

$$S_1 = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n+1}^{k+1} = \frac{-1}{2(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{n+1}^k - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{2(n+1)}$$

Do đó giả thiết bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{4024} \Leftrightarrow n = 2011$

Ta có: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}\ \ \forall k = 0,1,2,...,2n+1$

$\Rightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + ... + C_{2n+1}^{2n+1}$

Mặt khác: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1}$

$\Rightarrow 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n) = 2^{2n+1}$

$\Rightarrow S = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - C_{2n+1}^0 = 2^{2n} - 1 = 2^{4022} - 1$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ **2.** $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

3. $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

Giải

1. Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = C_n^{n-k}$

2. Ta có: $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k+1}\right)$

$= \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\dfrac{n+1}{k(n-k+1)} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$.

3. Áp dụng kết quả bài 2 ta có:

$VT = (C_n^k + C_n^{k+1}) + 2(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + (C_n^{k+2} + C_n^{k+3})$

$= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = (C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}) + (C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3})$

$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3} = VP$.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$ với $n, k \in \mathbb{N}^*, k \ge 2$

2. $A_n^k - A_{n-1}^k = k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n, k \in \mathbb{N}^*, n \ge 2, k \le n-1$

3. $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{C_n^k}$ với $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \le n$.

Giải

1. Ta có: $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = \dfrac{(n+k)!}{(k-2)!} + \dfrac{(n+k)!}{(k-1)!} = \dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1 + \dfrac{1}{k-1}\right)$

$= \dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}\dfrac{k}{k-1} = k^2\dfrac{(n+k)!}{k!} = k^2 A_{n+k}^n$

2. Ta có: $A_n^k - A_{n-1}^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} - \dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(\frac{n}{n-k} - 1\right) = k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = kA_{n-1}^{k-1}.$$

3. Ta có: $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k)+(k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}.$$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $nC_{n+k}^k = (k+1)C_{n+k}^{k+1}$ với $k, n \in \mathbb{N}^*$
2. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ với $m, n, k \in \mathbb{N}^*; k \le m \le n$
3. $C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = \dfrac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$
4. $C_{n+1}^2 - C_n^2 = n$ với $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$
5. $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{A_n^2} + \dfrac{1}{n} = 1$ với $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

Giải

1. Ta có: $nC_{n+k}^k = n\dfrac{(n+k)!}{n!k!} = (k+1)\dfrac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)!} = (k+1)C_{n+k}^{k+1}$

2. Ta có: $C_n^m C_m^k = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}.\dfrac{m!}{k!(m-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$

Và $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \dfrac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3. Ta có: $C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} + \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}.$$

4. Ta có: $C_{n+1}^2 - C_n^2 = \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{1}{2}[(n+1)n - n(n-1)] = n.$

5. Do $A_k^2 = \dfrac{k!}{(k-2)!} = k(k-1) \Rightarrow \dfrac{1}{A_k^2} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}.$

Thay vào vế trái ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$
2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1},\ 1 \le k \le n$
3. $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + \ldots + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n+1}^2$
4. $P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n-1)P_{n-1}.$

Giải

1. Ta có: $VT = 2\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 3\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$$= 2\left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + C_{n+1}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}.$$

2. Ta có: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \Rightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$

Suy ra: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} = C_n^k - C_k^k$

Hay $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$ vì $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1.$

3. Ta có: $k\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = n - k + 1$

Suy ra $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + \ldots + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \dfrac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$

4. Ta có: $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)P_{k-1}$

Suy ra: $\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)P_{k-1} = P_n - P_1 \Rightarrow P_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}kP_k.$

Vấn đề 3. Nhị thức Newton

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Nhị thức Newton

Định lí: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$

2. Nhận xét

Trong khai triển Newton $(a+b)^n$ có các tính chất sau

* Gồm có $n+1$ số hạng

* Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n

* Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

* Các hệ số có tính đối xứng: $C_n^k=C_n^{n-k}$

* Số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$

Ví dụ: Số hạng thứ nhất $T_1=T_{0+1}=C_n^0a^n$, số hạng thứ k $T_{(k-1)+1}=C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$

3. Một số hệ quả

Hệ quả: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n$

Từ khai triển này ta có các kết quả sau:

* $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$.

* $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=0$.

B. BÀI TOÁN 1: XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA SỐ HẠNG CHỨA X^m TRONG KHAI TRIỂN $\left(ax^p+bx^q\right)^n$ với $x>0$ (p,q là các hằng số khác nhau).

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI: Ta có:

$$\left(ax^p+bx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(ax^p\right)^{n-k}\left(bx^q\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^kx^{np-pk+qk}$$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa mãn: $np-pk+qk=m$.

Từ đó tìm $k=\dfrac{m-np}{p-q}$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^ka^{n-k}.b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

Nếu k không nguyên hoặc $k>n$ thì trong khai triển không chứa x^m, hệ số phải tìm bằng 0.

Chú ý: Xác định hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n$ được viết dưới dạng $a_0+a_1x+...+a_{2n}x^{2n}$.

Ta làm như sau:

* Viết $P(x)=\left(a+bx^p+cx^q\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\left(bx^p+cx^q\right)^k$;

* Viết số hạng tổng quát khi khai triển các số hạng dạng $\left(bx^p+cx^q\right)^k$ thành một đa thức theo luỹ thừa của x.

* Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m.

Chú ý: Để xác định hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn, ta làm như sau:

* Tính hệ số a_k theo k và n;

* Giải bất phương trình $a_{k-1}\le a_k$ với ẩn số k;

* Hệ số lớn nhất phải tìm ứng với số tự nhiên k lớn nhất thoả mãn bất phương trình trên.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của: $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

Giải

Đặt $f(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$

Ta có: $f(x)=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2)^k.x^k+x^2\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i(3x)^i=\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2)^k.x^{k+1}+\sum_{i=0}^{10}C_{10}^i3^i.x^{i+2}$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển đa thức của f(x) ứng với $k=4$ và $i=3$ là: $C_5^4(-2)^4+C_{10}^3.3^3=3320$.

Ví dụ 2. Tìm hệ số cuả x^8 trong khai triển đa thức $f(x)=\left[1+x^2(1-x)\right]^8$.

Giải

* **Cách 1:**

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8=C_8^0+C_8^1x^2(1-x)+C_8^2x^4(1-x)^2+C_8^3x^6(1-x)^3$$
$$+C_8^4x^8(1-x)^4+C_8^5x^{10}(1-x)^5...+C_8^8x^{16}(1-x)^8$$

Trong khai triển trên ta thấy bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8. Do đó x^8 chỉ có trong số hạng thứ tư, thứ năm với hệ số tương ứng là: $C_8^3.C_3^2, C_8^4.C_4^0$.

Vậy hệ số cuả x^8 trong khai triển đa thức $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$ là:

$$a_8 = C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238.$$

*** Cách 2:** Ta có: $\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = \sum\limits_{n=0}^{8} C_8^n x^{2n}(1-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{8} C_8^n \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2n+k}$

với $0 \le k \le n \le 8$.

Số hạng chứa x^8 ứng với $2n+k=8 \Rightarrow k=8-2n$ là một số chẵn.

Thử trực tiếp ta được $k=0; n=4$ và $k=2, n=3$.

Vậy hệ số của x^8 là $C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238$.

Ví dụ 3. Đa thức $P(x) = \left(1+3x+2x^2\right)^{10} = a_0 + a_1x + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15}.

Giải

Ta có: $P(x) = \left(1+3x+2x^2\right)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(3x+2x^2\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (3x)^{k-i}.(2x^2)^i = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i.3^{k-i}.2^i x^{k+i}$$

với $0 \le i \le k \le 10$. Do đó $k+i=15$ với các trường hợp:

$$k=10, i=5 \text{ hoặc } k=9, i=6 \text{ hoặc } k=8, i=7.$$

Vậy $a_{15} = C_{10}^{10}.C_{10}^5.3^5.2^5 + C_{10}^9.C_9^6.3^3.2^6 + C_{10}^8.C_8^7.3.2^7$.

Ví dụ 4. Tìm hệ số không chứa x trong các khai triển sau $(x^3 - \frac{2}{x})^n$, biết rằng: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$ với $x > 0$.

Giải

Ta có: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-1)!1!} + \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 78$

$\Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12$.

Khi đó: $f(x) = \left(x^3 - \dfrac{2}{x}\right)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{36-4k}$

Số hạng không chứa x ứng với $k: 36-4k=0 \Rightarrow k=9$

Số hạng không chứa x là: $(-2)^9 C_{12}^9 = -112640$.

Ví dụ 5. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Giải

*** Cách 1:** Ta có:

$\left(x^2+1\right)^n = C_n^0 x^{2n} + C_n^1 x^{2n-2} + C_n^2 x^{2n-4} + ... + C_n^n$

$(x+2)^n = C_n^0 x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + ... + 2^n C_n^n$

Dễ dàng kiểm tra $n=1$, $n=2$ không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với $n \ge 3$ thì dựa vào khai triển ta chỉ có thể phân tích:

$$x^{3n-3} = x^{2n}.x^{n-3} = x^{2n-2}.x^{n-1}$$

Do đó hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$ là: $a_{3n-3} = 2^3.C_n^0.C_n^3 + 2.C_n^1.C_n^1$.

Suy ra $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3} = 26n \Leftrightarrow n = -\dfrac{7}{2}$ hoặc $n=5$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

*** Cách 2:** Ta có: $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n = x^{3n}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^n$

$$= x^{3n}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{1}{x^2}\right)^i \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{2}{x}\right)^k = x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{-2i} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^{-k}\right]$$

Trong khai triển trên, luỹ thừa của x là $3n-3$ khi $-2i-k=-3 \Leftrightarrow 2i+k=3$.

Ta chỉ có hai trường hợp thoả mãn điều kiện này là $i=0, k=3$ hoặc $i=1, k=1$ (vì i, k nguyên).

Hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$ là:

$$a_{3n-3} = C_n^0.C_n^3.2^3 + C_n^1.C_n^1.2.$$

Do đó $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3} = 26n \Leftrightarrow n = -\dfrac{7}{2}$ hoặc $n=5$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

Giải

Do $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k}\quad\forall k=0,1,2,...,2n+1$

$\Rightarrow C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+...+C_{2n+1}^{2n+1}$

Mặt khác: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$

$\Rightarrow 2(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n)=2^{2n+1}$

$\Rightarrow C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{2n}-C_{2n+1}^0=2^{2n}-1$

$\Rightarrow 2^{2n}-1=2^{20}-1\Rightarrow n=10$.

Khi đó: $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\left(x^{-4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^{-4})^{10-k}.x^{7k}$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{11k-40}$$

Hệ số chứa x^{26} ứng với giá trị k: $11k-40=26\Rightarrow k=6$.

Vậy hệ số chứa x^{26} là: $C_{10}^6=210$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau:

1. $f(x)=(1-2x)^{10}$ **2.** $h(x)=x(2+3x)^9$ **3.** $g(x)=(1+x)^7+(1-x)^8+(2+x)^9$

Giải

1. Ta có $f(x)=\sum_{k=0}^{10}C_n^k1^{10-k}(-2x)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(-2)^kx^k$

Số hạng chứa x^7 ứng với giá trị $k=7$

Vậy hệ số của x^7 là: $C_{10}^7(-2)^7=-15360$.

2. Ta có $(2+3x)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k2^{9-k}(3x)^k=\sum_{k=0}^{9}C_9^k2^{9-k}3^k.x^k\Rightarrow h(x)=\sum_{k=0}^{9}C_9^k2^{9-k}3^kx^{k+1}$.

Số hạng chứa x^7 ứng với giá trị k thỏa mãn $k+1=7\Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số chứa x^7 là: $C_9^62^33^6=489888$.

3. Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^kx^k$ là : $C_7^7=1$

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1-x)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k(-1)^kx^k$ là : $C_8^7(-1)^7=-8$

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^kx^k$ là : $C_7^9=36$.

Vậy hệ số chứa x^7 trong khai triển $g(x)$ thành đa thức là: 29.

Chú ý: * Với $a\neq0$ ta có: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ với $n\in\mathbb{N}$.

* Với $a\geq0$ ta có: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ với $m,n\in\mathbb{N};n\geq1$.

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong các khai triển sau:

1. $f(x)=(x-\frac{2}{x})^{12}\quad(x\neq0)$ **2.** $g(x)=(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3})^{17}\quad(x>0)$.

Giải

1. Ta có: $f(x)=(x-2.x^{-1})^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^kx^{12-k}.(-2x^{-1})^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(-2)^kx^{12-2k}$

Số hạng không chứa x ứng với giá trị k thỏa mãn: $12-2k=0$

$\Leftrightarrow k=6\Rightarrow$ số hạng không chứa x là: $C_{12}^6.2^6=59136$.

2. Vì $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$ nên ta có:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}.\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k=\sum_{k=0}^{17}C_{17}^k.x^{\frac{17k-136}{12}}$$

Hệ số không chứa x ứng với giá trị k thỏa mãn: $17k-136=0\Leftrightarrow k=8$

Vậy hệ số không chứa x là: $C_{17}^8=24310$.

Bài 3.

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$.

2. Xét khai triển $f(x)=(2x+\frac{1}{x})^{20}$

a. Viết số hạng thứ $k+1$ trong khai triển

b. Số hạng nào trong khai triển không chứa x

3. Xác định hệ số của x^4 trong khai triển sau: $f(x)=(3x^2+2x+1)^{10}$.

4. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

5. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $f(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+...+(1+x)^{14}$

Giải

1. Ta có: $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)\Leftrightarrow\left(C_{n+3}^{n}+C_{n+3}^{n+1}\right)-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$

$$\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1}=7(n+3)\Leftrightarrow\frac{(n+2)(n+3)}{2!}=7(n+3)\Leftrightarrow n+2=7.2!=14\Leftrightarrow n=12.$$

Khi đó: $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^k.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$.

Số hạng chứa x^8 ứng với k thỏa mãn: $\frac{60-11k}{2}=8\Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là: $C_{12}^4=\frac{12!}{4!(12-4)!}=495$.

2. a. Ta có: $T_{k+1}=C_{20}^k(2x)^{20-k}\frac{1}{x^k}=C_{20}^k.2^{20-k}.x^{20-2k}$

b. Số hạng không chứa x ứng với k: $20-2k=0\Leftrightarrow k=10$.

Số hạng không chứa x: $C_{20}^{10}.2^{10}$.

3. $f(x)=\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(2x+3x^2\right)^k$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i(2x)^{k-i}.(3x^2)^i=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i2^{k-i}.3^ix^{k+i}\text{ với }0\le i\le k\le 10.$$

Do đó $k+i=4$ với các trường hợp $i=0, k=4$ hoặc $i=1, k=3$ hoặc $i=k=2$.

Vậy hệ số chứa x^4: $2^4C_{10}^4.C_4^0+2^23^1C_{10}^3.C_3^1+3^2C_{10}^2.C_2^2=8085$.

4. Ta có: $\begin{cases}\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^k=2^{2n+1}\\ \sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i+1}=\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i}\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{2i+1}=2^{2n}=1024\Rightarrow n=5$

Suy ra $(2-3x)^{2n}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k2^{10-k}.(-3)^kx^k$

Hệ số của x^7 là $C_{10}^7.2^3.(-3)^7=-2099520$.

5. Hệ số của x^9: $C_9^9+C_{10}^9+C_{11}^9+C_{12}^9+C_{13}^9+C_{14}^9=3003$.

Bài 4.

1. Xác định số hạng không phụ thuộc vào x khi khai triển biểu thức $\left[\frac{1}{x}-\left(x+x^2\right)\right]^n$ với n là số nguyên dương thoả mãn.

$C_n^3+2n=A_{n+1}^2$.(C_n^k, A_n^k tương ứng là số tổ hợp, số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

2. Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau:

a. $f(x)=(3x^2+1)^{10}$

b. $f(x)=(1+x+2x^2)^{10}$

c. $f(x)=8(1+8x)^8-9(1+9x)^9+10(1+10x)^{10}$

Giải

1. Ta có: $C_n^3+2n=A_{n+1}^2\Leftrightarrow\begin{cases}n\ge 3\\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}+2n=(n+1)n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ge 3\\ n^2-9n+8=0\end{cases}\Leftrightarrow n=8$.

Theo nhị thức Newton ta có:

$$\left[\frac{1}{x}-\left(x+x^2\right)\right]^8=\left[\frac{1}{x}-x(1+x)\right]^8=C_8^0\frac{1}{x^8}-C_8^1\frac{1}{x^6}(1+x)$$

$$+C_8^2\frac{1}{x^4}(1+x)^2-C_8^3\frac{1}{x^2}(1+x)^3+C_8^4(1+x)^4-...+C_8^8x^8(1+x)^8$$

Số hạng không phụ thuộc vào x chỉ có trong hai biểu thức:

$$-C_8^3\frac{1}{x^2}(1+x)^3\text{ và }C_8^4(1+x)^4.$$

Trong đó có hai số hạng không phụ thuộc vào x là: $-C_8^3.C_3^2$ và $C_8^4.C_4^0$

Do đó số hạng không phụ thuộc vào x là: $-C_8^3.C_3^2+C_8^4.C_4^0=-98$.

2. a. Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k3^kx^{2k}$, số hạng chứa x^8 ứng với $k=4$ nên hệ số x^8 là: $C_{10}^4.3^4=17010$.

b. Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(2x^2)^{10-k}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{10}\sum_{j=0}^{k}C_{10}^kC_k^j.2^{10-k}x^{20-2k+j}$

Số hạng chứa x^8 ứng với cặp (k, j) thỏa mãn: $\begin{cases}0\le j\le k\le 10\\ j=2k-12\end{cases}$

Nên hệ số của x^8 là: $C_{10}^6C_6^0.2^4+C_{10}^7C_7^22^3+C_{10}^8C_8^42^2+C_{10}^9C_9^62+C_{10}^{10}C_{10}^8=37845$.

c. Ta có: $(1+8x)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k 8^{8-k} x^{8-k}$

$$(1+9x)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k 9^{9-k} x^{9-k}$$

$$(1+10x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 10^{10-k} x^{10-k}$$

Nên hệ số chứa x^8 là: $8.C_8^0.8^8 - 9.C_9^1.9^8 + 10.C_{10}^8.10^8$.

Bài 5.

1. Khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$

a) Hãy tính hệ số a_{10}.

b) Tính tổng $T = a_0 + a_1 + ... + a_{15}$ và $S = a_0 - a_1 + a_2 - ... - a_{15}$.

2. Khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$

a) Hãy tính hệ số a_4.

b) Tính tổng $S = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + ... + 2^{20}a_{20}$.

3. Tìm số hạng của khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ là một số nguyên.

Giải

1. Đặt $f(x) = (1+x+x^2+x^3)^5 = (1+x)^5(1+x^2)^5$

a) Do đó hệ số x^{10} bằng: $a_{10} = C_5^0.C_5^5 + C_5^2C_5^4 + C_5^4C_5^3$.

b) $T = f(1) = 4^5$; $S = f(-1) = 0$.

2. Đặt $f(x) = (1+2x+3x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{2k}(1+2x)^{10-k}$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{2k} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10-k}^i 2^{10-k-i} x^{10-k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i 3^k 2^{10-k-i} x^{10+k-i}$$

a) Ta có: $a_4 = C_{10}^0.2^4C_{10}^4$

b) Ta có: $S = f(2) = 17^{10}$.

3. Ta có $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^{9-k}$

Số hạng là số nguyên ứng với các giá trị của k thỏa mãn:

$$\begin{cases} k = 2m \\ 9-k = 3n \Leftrightarrow k = 0, k = 6 \\ k = 0,...,9 \end{cases}$$

Các số hạng là số nguyên: $C_9^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8$ và $C_9^6\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$.

C. BÀI TOÁN 2: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG $\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k b^k$.

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp 1: Dựa vào khai triển nhị thức Newton

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + a^{n-1}bC_n^1 + a^{n-2}b^2C_n^2 + ... + b^nC_n^n.$$

Ta chọn những giá trị a, b thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

* $C_n^k = C_n^{n-k}$ * $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k = 0$ * $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$

* $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = (1+a)^n$.

2. Phương pháp 2: Dựa vào đẳng thức đặc trưng:

Mấu chốt của cách giải trên là ta tìm ra được đẳng thức (*) và ta thường gọi (*) là đẳng thức đặc trưng.

Cách giải ở trên được trình bày theo cách xét số hạng tổng quát ở vế trái (thường có hệ số chứa k) và biến đổi số hạng đó có hệ số không chứa k hoặc chứa k nhưng tổng mới dễ tính hơn hoặc đã có sẵn.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 243$.

Giải

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$

Cho $x = 2$ ta có: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 3^n$

Do vậy ta suy ra $3^n = 243 = 3^5 \Rightarrow n = 5$.

Ví dụ 2. Tính tổng sau: $S=\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^3-\frac{1}{8}C_n^4+...+\frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n$.

Giải

Ta có: $S=\frac{1}{2}\left(C_n^0-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2-...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n\right)$

Vì $\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k=\frac{(-1)^k}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ nên: $S=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n+1}^{k+1}$

$$=\frac{-1}{2(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_{n+1}^k-C_{n+1}^0\right)=\frac{1}{2(n+1)}.$$

Ví dụ 3. Tính tổng sau: $S=C_n^1 3^{n-1}+2C_n^2 3^{n-2}+3C_n^3 3^{n-3}+...+nC_n^n$.

Giải

Ta có: $S=3^n\sum_{k=1}^{n}kC_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k$

Vì $kC_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k=n\left(\frac{1}{3}\right)^kC_{n-1}^{k-1}\ \forall k\ge 1$ nên

$$S=3^n.n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^kC_{n-1}^{k-1}=3^{n-1}.n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^kC_{n-1}^k=3^{n-1}.n(1+\frac{1}{3})^{n-1}=n.4^{n-1}.$$

Ví dụ 4. Chứng minh đẳng thức sau:

1. $C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+...+C_m^kC_n^0=C_{m+n}^k$ với $m,n\in\mathbb{N},0\le k\le\min\{m,n\}$.
2. $C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}$.
3. $C_n^0C_n^k+C_n^1C_{n-1}^{k-1}+...+C_n^kC_{n-k}^0=2^kC_n^k$ với $0\le k\le n$.

Giải

1. Xét khai triển: $f(x)=(1+x)^{m+n}=\sum_{i=0}^{m+n}C_{m+n}^kx^k$ (1)

Ta có thể khai triển $f(x)$ theo cách khác như sau

$$f(x)=(1+x)^n(1+x)^m=\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}C_n^jx^j\right)\ (2)$$

Hệ số của x^k trong khai triển (1) là: C_{m+n}^k

Hệ số của x^k trong khai triển (2) là: $\sum_{\substack{i=\overline{0,n}\\ j=\overline{0,m}\\ i+j=k}}C_n^iC_m^j=\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}$

Từ đó ta suy ra: $\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}=C_{m+n}^k$.

2. Xét khai triển: $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Cho $x=-1$ ta có được: $0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

Hay $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}$.

3. Ta có: $C_n^iC_{n-i}^{k-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}.\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}=\frac{n!}{i!(n-k)!(k-i)!}$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}.\frac{k!}{(k-i)!i!}=C_n^k.C_k^i$$

Suy ra: $\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_{n-i}^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}C_n^kC_k^i=C_n^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i=2^kC_n^k$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}$
2. $C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+...+C_m^kC_n^0=C_{m+n}^k$
3. $C_{2011}^0+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}=\frac{3^{2011}-1}{2}$.

Giải

1. Xét khai triển:

$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Cho $x=-1$ ta có được: $0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

Hay $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}$.

2. Xét $f(x)=(1+x)^{m+n}$

Ta khai triển $f(x)$ theo hai cách:

* **Cách 1:** $f(x)=\sum_{k=0}^{m+n}C_{n+m}^kx^k\Rightarrow$ hệ số x^k bằng C_{m+n}^k (1)

*** Cách 2:** $f(x)=(1+x)^n(1+x)^m=\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i.\sum_{j=0}^{m}C_m^jx^j$

Hệ số của x^k trong khai triển ứng với các cặp (i,j) thỏa mãn: $i+j=k$

Do đó ta có hệ số chứa x^k bằng: $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+...+C_n^{k-1}C_m^1+C_n^kC_m^0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

3. Xét khai triển: $(1+x)^{2011}=C_{2011}^0+xC_{2011}^1+x^2C_{2011}^2+...+x^{2010}C_{2011}^{2010}+x^{2011}C_{2011}^{2011}$

Cho $x=2$ ta có được:

$$3^{2011}=C_{2011}^0+2.C_{2011}^1+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}+2^{2011}C_{2011}^{2011} \quad (3)$$

Cho $x=-2$ ta có được:

$$-1=C_{2011}^0-2.C_{2011}^1+2^2C_{2011}^2-...+2^{2010}C_{2011}^{2010}-2^{2011}C_{2011}^{2011} \quad (4)$$

Lấy (3) + (4) ta có: $2\left(C_{2011}^0+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}\right)=3^{2011}-1$

$$C_{2011}^0+2^2C_{2011}^2+...+2^{2010}C_{2011}^{2010}=\frac{3^{2011}-1}{2}.$$

Bài 2. Tính các tổng sau:

1. $S_1=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$

2. $S_2=C_n^1+2C_n^2+...+nC_n^n$

3. $S_3=2.1.C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n$.

Giải

1. Ta có: $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ (*)

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k-C_{n+1}^0\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2. Ta có: $kC_n^k=k.\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$

$$=n\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}=nC_{n-1}^{k-1},\ \forall k\ge 1$$

$$\Rightarrow S_2=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k=n.2^{n-1}.$$

3. Ta có $k(k-1)C_n^k=\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

$$\Rightarrow S_3=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}=n(n-1)2^{n-2}.$$

Bài 3. Tính tổng $S=C_n^0+\frac{3^2-1}{2}C_n^1+...+\frac{3^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

Giải

Ta có $S=S_1-S_2$, trong đó: $S_1=C_n^0+\frac{3^2}{2}C_n^1+\frac{3^3}{3}C_n^2+...+\frac{3^{n+1}}{n+1}C_n^n$

$$S_2=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$$

Ta có $S_2=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-1$. Tính $S_1=?$

Ta có: $\frac{3^{k+1}}{k+1}C_n^k=3^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$

$$=\frac{3^{k+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!}=\frac{3^{k+1}}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}3^{k+1}C_{n+2}^{k+1}-2C_n^0=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}3^kC_{n+1}^k-C_n^0\right)-2C_n^0=\frac{4^{n+1}-1}{n+1}-2.$$

Vậy $S=\frac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}-1$.

Bài 4.

1. Tính tổng $S=C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

2. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-...+(2n+1)2^nC_{2n+1}^{2n+1}=2005.$$

3. Chứng minh: $1.3^0.5^{n-1}C_n^{n-1}+2.3^1.5^{n-2}C_n^{n-2}+...+n.3^{n-1}5^0C_n^0=n.8^{n-1}$.

4. Tính tổng $S=2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n$.

5. Chứng minh $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

Giải

1. Ta có: $S = S_1 - S_2$. Trong đó $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \frac{2^{k+1}}{k+1}$; $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} - 1$

   Mà $\frac{2^{k+1}}{k+1} C_n^k = \frac{2^{k+1}}{n+1} C_{n+1}^{k+1} \Rightarrow S_1 = \frac{3^{n+1}-1}{n+1} - 1$. Suy ra: $S = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.

2. Đặt $S = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}.k2^{k-1}C_{2n+1}^k$. Ta có: $(-1)^{k-1}.k2^{k-1}C_{2n+1}^k = (-1)^{k-1}.(2n+1).2^{k-1}C_{2n}^{k-1}$

   Nên $S = (2n+1)(C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 - ... + 2^{2n}C_{2n}^{2n}) = 2n+1$

   Vậy $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

3. Ta có: $VT = \sum\limits_{k=1}^{n} k.3^{k-1}.5^{n-k}C_n^{n-k}$ Mà $k.3^{k-1}.5^{n-k}C_n^{n-k} = n.3^{k-1}.5^{n-k}.C_{n-1}^{k-1}$

   Suy ra: $VT = n(3^0.5^{n-1}C_{n-1}^0 + 3^1.5^{n-2}C_{n-1}^1 + ... + 3^{n-1}5^0C_{n-1}^{n-1}) = n(5+3)^{n-1} = n.8^{n-1}$.

4. Ta có: $S = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k$ Mà $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

   Suy ra $S = n(n-1)(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-2}) = n(n-1)2^{n-2}$

5. Ta có: $(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}$.

   Vế trái của hệ thức trên chính là: $\left(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n\right)$

   Và ta thấy hệ số của x^n trong vế trái là: $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$

   Còn hệ số của x^n trong vế phải $(x+1)^{2n}$ là C_{2n}^n

   Do đó $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

Bài 5. Tính các tổng sau:

1. $S_1 = 5^nC_n^0 + 5^{n-1}.3.C_n^{n-1} + 3^2.5^{n-2}C_n^{n-2} + ... + 3^nC_n^0$.
2. $S_2 = C_{2011}^0 + 2^2C_{2011}^2 + ... + 2^{2010}C_{2011}^{2010}$.
3. $S_3 = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n$.
4. $S_4 = 2.1.C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n$.
5. $S_5 = C_n^0 + \frac{3^2-1}{2}C_n^1 + ... + \frac{3^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

Giải

1. Ta có: $S_1 = (5+3)^n = 8^n$

2. Xét khai triển: $(1+x)^{2011} = C_{2011}^0 + xC_{2011}^1 + x^2C_{2011}^2 + ... + x^{2010}C_{2011}^{2010} + x^{2011}C_{2011}^{2011}$

   Cho $x = 2$ ta có được: $3^{2011} = C_{2011}^0 + 2.C_{2011}^1 + 2^2C_{2011}^2 + ... + 2^{2010}C_{2011}^{2010} + 2^{2011}C_{2011}^{2011}$ (1)

   Cho $x = -2$ ta có được: $-1 = C_{2011}^0 - 2.C_{2011}^1 + 2^2C_{2011}^2 - ... + 2^{2010}C_{2011}^{2010} - 2^{2011}C_{2011}^{2011}$ (2)

   Lấy (1) + (2) ta có: $2\left(C_{2011}^0 + 2^2C_{2011}^2 + ... + 2^{2010}C_{2011}^{2010}\right) = 3^{2011} - 1$

   Suy ra: $S_2 = C_{2011}^0 + 2^2C_{2011}^2 + ... + 2^{2010}C_{2011}^{2010} = \frac{3^{2011}-1}{2}$.

3. Ta có: $kC_n^k = k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$

   $$= n\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = nC_{n-1}^{k-1},\ \forall k \ge 1$$

   $$\Rightarrow S_3 = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n.2^{n-1}.$$

4. Ta có: $k(k-1)C_n^k = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

   $$\Rightarrow S_4 = n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} = n(n-1)2^{n-2}.$$

5. Ta có $S_5 = A - B$, trong đó $A = C_n^0 + \frac{3^2}{2}C_n^1 + \frac{3^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{3^{n+1}}{n+1}C_n^n$

   $$B = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

   * Tính $A = ?$

   Ta có: $\frac{3^{k+1}}{k+1}C_n^k = 3^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{3^{k+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{3^{k+1}}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

   $$\Rightarrow A = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}C_{n+2}^{k+1} - 2C_n^0 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} 3^kC_{n+1}^k - C_n^0\right) - 2C_n^0 = \frac{4^{n+1}-1}{n+1} - 2$$

* Tính $B = ?$

Ta có: $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1))!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$ (*)

$$\Rightarrow B = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} - 1 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} - C_{n+1}^{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} - 1.$$

Vậy $S_5 = \frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} - 1$.

Bài 6.

1. Cho $n \in \mathbb{Z}, n \ge 2$. Chứng minh rằng: $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

2. Chứng minh rằng x là số tự nhiên chia hết cho 2002 với

$$x = \sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000}\right].$$

3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì tổng

$S = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ không chia hết cho 5.

4. Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho: $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$.

5. Chứng minh rằng $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ là một số tự nhiên lẻ (trong đó $[x]$ là kí hiệu phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

6. Cho m, n là hai số tự nhiên, p là số nguyên tố. Giả sử:

$$m = m_k p^k + m_{k-1}p^{k-1} + \ldots + m_1 p + m_0$$

$$n = n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$$

Chứng minh rằng: $C_m^n \equiv \prod_{i=0}^{k} C_{m_i}^{n_i} \pmod p$ (Quy ước $C_a^b = 0, a < b$).

Giải

1. Xét khai triển: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n\frac{1}{n^n} = 2 + C_n^2\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n\frac{1}{n^n} > 2$

Mà: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ $(2 \le k \le n)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^k}C_n^k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}C_n^k < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad (1)$$

Mặt khác: $1 + \frac{1}{1!} = 2$

$\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

....

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)^n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

Cộng vế theo vế $\Rightarrow 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3 - \frac{1}{n} < 3$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Vậy: $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

2. Đặt $a = \left(\sqrt{1011}+1\right)^{2000}$, $b = \left(\sqrt{1011}-1\right)^{2000}$

Ta có: $\left(\sqrt{1001}+x\right)^{2000} = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} + C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999}x + C_{2000}^{2000}x^{2000}$

- Với $x = 1$: $a = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} + C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999} + \ldots + C_{2000}^{2000}$
- Với $x = -1$: $b = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} - C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999} + \ldots + C_{2000}^{2000}$

$a - b = 2\sqrt{1001}\left(C_{2000}^1 + C_{2000}^3.1001 + \ldots + C_{2000}^{1999}1001^{1999}\right) = 2\sqrt{1001}.A$ (Với $A \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow x = 2002A \Rightarrow x \,\vdots\, 2002$

3. Đặt $x = \sqrt{8}$. Ta có: $(1+x)^{2n+1} = A + Bx$ (1) với $B = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$

Tương tự: $(1-x)^{2n+1} = A - Bx$ (2)

Nhân (1) và (2) theo vế ta được: $(1-x^2)^{2n+1} = A^2 - x^2B^2$

Hay là: $7^{2n+1} = 8B^2 - A^2$

Do $7^{2n+1} = 49^n.7 \equiv (-1)^n.2 \equiv \pm 2 \pmod 5$

Nên nếu $B \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ điều này vô lí vì mọi số chính phương khi chia cho 5 chỉ có các số dư là: 0 hoặc ± 1.

4. Ta có: $x = \left(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{m}\right)^{n-k} \left(\pm\sqrt{m-1}\right)^k$

- $n = 2p$ ta có:

$$x = \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k}\left(\sqrt{m}\right)^{2p-2k}\left(\sqrt{m-1}\right)^{2k} \pm \sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1}\left(\sqrt{m}\right)^{2p-2k+1}\left(\sqrt{m-1}\right)^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} m^{p-k}(m-1)^k \pm \sqrt{m(m-1)}\sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1} m^{p-k}(m-1)^k$$

$$= a \pm b\sqrt{m(m-1)} = \sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2 m(m-1)} \quad (\text{Với } a, b \in \mathbb{Z}).$$

- $n = 2p-1$ ta có:

$$x = \sum_{k=0}^{p-1} C_n^{2k}\left(\sqrt{m}\right)^{2p-2k-1}\left(\sqrt{m-1}\right)^{2k} \pm \sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1}\left(\sqrt{m}\right)^{2p-2k}\left(\sqrt{m-1}\right)^{2k-1}$$

$$= \sqrt{m}\sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} m^{p-k-1}(m-1)^k \pm \sqrt{m-1}\sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1} m^{p-k}(m-1)^{k-1}$$

$$= c\sqrt{m} \pm d\sqrt{m-1} = \sqrt{c^2 m} \pm \sqrt{d^2(m-1)} \quad (\text{Với } c, d \in \mathbb{Z}).$$

Tóm lại trong các trường hợp ta luôn có: $\left(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}\right)^n = \sqrt{k} \pm \sqrt{l}$

Suy ra: $k - l = \left(\sqrt{k} + \sqrt{l}\right)\left(\sqrt{k} - \sqrt{l}\right) = \left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right)^n\left(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}\right)^n = 1 \Rightarrow l = k - 1$

Do đó: $\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$.

5. • Với $n = 2p$ ta có:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2k} + \sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1} 2^{2p-2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k} 3^k + \sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1} 2^{2p-2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k-1}$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k} 3^k - \sum_{k=1}^{p} C_n^{2k-1} 2^{2p-2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k-1}$$

Suy ra: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k} 3^k$.

- Với $n = 2p+1$ ta có:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k+1} 2^{2p-2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k+1} 3^k + \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k+1} 2^{2p-2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k+1} 3^k - \sum_{k=0}^{p} C_n^{2k+1} 2^{2p-2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}$$

Suy ra: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2\sum\limits_{k=0}^{p} C_n^{2k} 2^{2p-2k+1} 3^k$.

Tóm lại ta luôn có: $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2a$ là một số chẵn

Mà $0 < \left(2-\sqrt{3}\right)^n < 1 \Rightarrow \left[(2+\sqrt{3})^n\right] = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n - 1 = 2a - 1$ là số tự nhiên lẻ.

6. • Nếu $m = n$ thì bài toán hiển nhiên đúng

- Không mất tính tổng quát ta giả sử $m > n$

Trước hết, ta thấy rằng: $(p,k) = 1$, $k = \overline{1, p-1}$ nên $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = p.\dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \,\vdots\, p$

Tức là: $C_p^k \equiv 0 \pmod p$, $k = \overline{1, p-1}$.

Ta có: $(x+1)^p = x^p + 1 + \sum\limits_{i=1}^{p-1} C_p^i.x^{p-i} \equiv x^p + 1 \pmod p$ (*)

Ta chứng minh: $(x+1)^{p^j} \equiv x^{p^j} + 1 \pmod p, \forall j \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp. Thật vậy:

- Với $j = 1$, nhận xét đúng theo (*).
- Giả sử nhận xét này đúng với $j = n \ge 1$. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $j = n+1$.

Ta có: $(x+1)^{p^n} \equiv x^{p^n} + 1 \pmod p$. Suy ra: $\left((x+1)^{p^n}\right)^n \equiv \left(x^{p^n}\right)^n + 1 \pmod p$

$\Rightarrow (x+1)^{p^{n+1}} \equiv x^{p^{n+1}} + 1 \pmod p$.

Do đó nhận xét đúng với $j = n + 1$. Ta xét khai triển sau:

$$(1+x)^m = (1+x)^{\sum\limits_{i=0}^{k} m_i.p^i} \equiv \prod_{i=0}^{k}(1+x^{p^i})^{m_i} \equiv \prod_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^{j} x^{j.p^i} \pmod p.$$

Hệ số của x^n ở vế $(1+x)^m$ là C_m^n;

do biểu diễn $n = n_k.p^k + n_{k-1}.p^{k-1} + ... + n_2p^2 + n_1.p + n_0$ là duy nhất nên hệ số của x^n ở vế $\prod\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^{j} x^{j.p^i}$ là $\prod\limits_{i=0}^{k} C_{m_i}^{n_i}$.

Từ đó ta được: $C_m^n \equiv \prod\limits_{i=0}^{k} C_{m_i}^{n_i} \pmod p$ và bài toán được chứng minh.

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $C_6^0.C_n^k + C_6^1.C_n^{k-1} + ... + C_6^6.C_n^{k-6} = C_{n+6}^k$

2. $\left(C_n^0\right)^2 - \left(C_n^1\right)^2 + ... + (-1)^n\left(C_n^n\right)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$

3. $\dfrac{1}{2}C_n^0 - \dfrac{1}{4}C_n^1 + \dfrac{1}{6}C_n^2 - \dfrac{1}{8}C_n^3 + ... + \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \dfrac{1}{2(n+1)}$

4. $\dfrac{1}{2}C_n^1 + \dfrac{2}{3}C_n^2 + \dfrac{3}{4}C_n^3 + ... + \dfrac{n}{n+1}C_n^n = \dfrac{(n-1)2^n+1}{n+1}$.

Giải

1. Xét khai triển: $f(x) = (x+1)^{n+6} = \sum\limits_{i=0}^{n+6} C_{n+6}^i x^i$, suy ra hệ số x^k là: C_{n+6}^k

Mặt khác: $f(x) = (x+1)^n(x+1)^6 = \left(\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^j\right)\left(\sum\limits_{m=0}^{6} C_n^m x^m\right)$, suy ra hệ số của x^k là: $C_6^0.C_n^k + C_6^1.C_n^{k-1} + ... + C_6^6.C_n^{k-6}$

Từ đó ta có: $C_6^0.C_n^k + C_6^1.C_n^{k-1} + ... + C_6^6.C_n^{k-6} = C_{n+6}^k$.

2. Xét khai triển: $f(x) = (x-1)^{2n}$ theo hai cách:

*** Cách 1**: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k x^{2n-k}$

*** Cách 2**: $f(x) = (x-1)^n(x-1)^n = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i(-1)^i x^{n-i}\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^i(-1)^j x^{n-j}\right)$

So sánh hệ số của x^n trong hai cách khai triển trên và sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có: $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{n!}{(k+1).k!(n-k)!} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Nên $VT = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+1}(-1)^k C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{1}{2(n+1)}\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{k-1}C_{n+1}^k + \dfrac{1}{2(n+1)}$

$$= \frac{1}{2(n+1)}(1-1)^{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

4. Ta có: $\dfrac{k}{k+1}C_n^k = \dfrac{k}{k+1}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{k}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Suy ra: $VT = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} kC_{n+1}^{k+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)C_{n+1}^{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} kC_{n+1}^{k} - \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1}\right)$$

Mà: $kC_{n+1}^k = k\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = (n+1)\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = (n+1)C_n^{k-1}$

Do đó: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} kC_{n+1}^k = (n+1)\sum\limits_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} = (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = (n+1)2^n$

Suy ra: $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_{n+1}^k = (n+1)2^n - (n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k - (C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1) = 2^{n+1} - n - 2$$

Vậy $VT = \dfrac{1}{n+1}\left[(n+1)2^n - n - 1 - 2^{n+1} + n + 2\right] = \dfrac{(n-1)2^n+1}{n+1}$.

Bài 8.

1. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc n thỏa mãn $f(x)=2^x$ với $x=1,2,3,\dots,n+1$.

   Tính $f(n+2)$.

2. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n}^n=(2n)^k$, trong đó k là số các ước nguyên dương của C_{2n}^n.

Giải

1. Ta có: $2^m=C_m^0+C_m^1+\dots+C_m^m$

   Xét đa thức $P(y)=2\left(C_{y-1}^0+C_{y-1}^1+\dots+C_{y-1}^n\right)$

   Số hạng bậc cao nhất của $P(y)$ là $2C_{y-1}^n=\dfrac{2(y-1)\dots(y-n)}{n!}$ là một đa thức bậc n

   Ta có: $P(x)=f(x)$ với $\forall x=1,2,3,\dots,n+1$

   Suy ra: $f(x)=P(x)\ \forall x \Rightarrow f(n+2)=2\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+\dots+C_{n+1}^n\right)=2^{n+2}-2$.

2. Giả sử p là một ước nguyên tố của C_{2n}^n, gọi m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn ra các thừa số nguyên tố của C_{2n}^n.

   Ta chứng minh $p^m\le 2n$ bằng phản chứng.

   Giả sử $p^m>2n\Rightarrow\left[\dfrac{2n}{p^m}\right]=0$

   $$m=\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+\dots+\left(\left[\frac{2n}{p^{m-1}}\right]-2\left[\frac{n}{p^{m-1}}\right]\right)$$

   Do $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $2[x]+2>2x\ge[2x]\Rightarrow[2x]-2[x]\le 1$

   Dẫn tới: $m\le m-1$ vô lí. Do đó: $p^m\le 2n$

   Từ đó ta có được: $C_{2n}^n=(2n)^k\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\ C_{2n}^n=2n\end{cases}\Leftrightarrow n=k=1$.

CHƯƠNG 2: BIẾN CỐ – XÁC XUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Kết quả của nó không đoán trước được;
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

2. Biến cố

Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là kết quả thuận lợi cho A.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A hoặc $n(A)$.

Với mỗi phép thử T có một biến cố luôn xảy ra, gọi là biến cố chắc chắn.

Với mỗi phép thử T có một biến cố không bao giờ xảy ra, gọi là biến cố không thể. Kí hiệu $\varnothing$.

II. TÍNH CHẤT

Giả sử Ω là không gian mẫu, A và B là các biến cố.

- $\Omega\setminus A=\overline{A}$ được gọi là biến cố đối của biến cố A.
- $A\cup B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A hoặc B xảy ra.
- $A\cap B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A và B cùng xảy ra. $A\cap B$ còn được viết là AB.
- Nếu $AB=\varnothing$, ta nói A và B xung khắc.

III. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Cho T là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn. Giả sử A là một biến cố được mô ta bằng $\Omega_A\subset\Omega$. Xác suất của biến cố A, kí hiệu bởi $P(A)$, được cho bởi công thức:

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Chú ý: • Xác suất của biến cố A chỉ phụ thuộc vào số kết quả thuận lợi cho A, nên ta đồng nhất Ω_A với A nên ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

- $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0,\ 0 \le P(A) \le 1$

2. Định nghĩa thống kê của xác suất

Xét phép thử ngẫu nhiên T và một biến cố A liên quan tới phép thử đó. Nếu tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T và thống kê số lần xuất hiện của A Khi đó xác suất của biến cố A được định nghĩa như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định không gian mẫu và biến cố

I. PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp: Để xác định không gian mẫu và biến cố ta thường sử dụng các cách sau:

*** Cách 1:** Liệt kê các phần tử của không gian mẫu và biến cố rồi chúng ta đếm.

*** Cách 2:** Sử dụng các quy tắc đếm để xác định số phần tử của không gian mẫu và biến cố.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong một chiếc hộp đựng 6 viên bi đỏ, 8 viên bi xanh, 10 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính số phần tử của:

1. Không gian mẫu.

2. Các biến cố:

A: " 4 viên bi lấy ra có đúng hai viên bi màu trắng"

B: " 4 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ"

C: " 4 viên bi lấy ra có đủ 3 màu".

Giải

1. Ta có: $n(\Omega) = C_{24}^4 = 10626$

2. Số cách chọn 4 viên bi có đúng hai viên bị màu trắng là: $C_{10}^2.C_{14}^2 = 4095$

Suy ra: $n(A) = 4095$.

Số cách lấy 4 viên bi mà không có viên bi màu đỏ được chọn là: C_{18}^4

Suy ra: $n(B) = C_{24}^4 - C_{18}^4 = 7566$.

Số cách lấy 4 viên bi chỉ có một màu là: $C_6^4 + C_8^4 + C_{10}^4$

Số cách lấy 4 viên bi có đúng hai màu là: $C_{14}^4 + C_{18}^4 + C_{14}^4 - 2(C_6^4 + C_8^4 + C_{10}^4)$

Số cách lấy 4 viên bị có đủ ba màu là: $C_{24}^4 - (C_{14}^4 + C_{18}^4 + C_{14}^4) + (C_6^4 + C_8^4 + C_{10}^4) = 5859$

Suy ra $n(C) = 5859$.

Ví dụ 2. Một xạ thủ bắn liên tục 4 phát đạn vào bia. Gọi A_k là các biến cố " xạ thủ bắn trúng lần thứ k " với $k = 1,2,3,4$. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2, A_3, A_4:

A: "Lần thứ tư mới bắn trúng bia"

B: "Bắn trúng bia ít nhất một lần"

C: " Chỉ bắn trúng bia hai lần".

Giải

Ta có: $\overline{A_k}$ là biến cố lần thứ k ($k = 1,2,3,4$) bắn không trúng bia.

Do đó: $A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4$

$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

$C = A_i \cap A_j \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_m}$ với $i, j, k, m \in \{1,2,3,4\}$ và đôi một khác nhau.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét phép thử tung con súc sắc 6 mặt hai lần. Tính số phần tử của:

1. Xác định không gian mẫu

2. Các biến cố:

A:" số chấm xuất hiện ở cả hai lần tung giống nhau"

B:" Tổng số chấm xuất hiện ở hai lần tung chia hết cho 3"

C: " Số chấm xuất hiện ở lần một lớn hơn số chấm xuất hiện ở lần hai".

Giải

1. Không gian mẫu gồm các bộ (i; j), trong đó $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ i nhận 6 giá trị, j cũng nhận 6 giá trị nên có $6.6 = 36$ bộ $(i;j)$

Vậy $\Omega = \{(i,j) \mid i,j = 1,2,3,4,5,6\}$ và $n(\Omega) = 36$.

2. Ta có: $A = \{(1,1);(2,2);(3,3),(4;4),(5;5),(6;6)\}$, $n(A) = 6$

Xét các cặp (i,j) với $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ mà $i + j \,\vdots\, 3$

Ta có các cặp có tổng chia hết cho 3 là: (1,2); (1,5); (2,4); (3,3); (3,6); (4,5)

Hơn nữa mỗi cặp (trừ cặp (3,3)) khi hoán vị ta được một cặp thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $n(B) = 11$.

Số các cặp $(i,j); i > j$ là: (2,1); (3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4) (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5).

Vậy $n(C) = 15$.

Bài 2. Gieo một đồng tiền 5 lần. Xác định và tính số phần tử của:

1. Không gian mẫu
2. Các biến cố: A: " Lần đầu tiên xuất hiện mặt ngửa"
   B: " Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần"
   C: " Số lần mặt sấp xuất hiện nhiều hơn mặt ngửa".

Giải

1. Kết quả của 5 lần gieo là dãy abcde với a,b,c,d,e nhận một trong hai giá trị N hoặc S. Do đó số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 2.2.2.2.2 = 32$.
2. Lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp nên a chỉ nhận giá trị S; b,c,d,e nhận S hoặc N nên $n(A) = 1.2.2.2.2 = 16$.

   Kết quả 5 lần gieo mà không có lần nào xuất hiện mặt sấp là 1

   Vậy $n(B) = 32 - 1 = 31$.

   Kết quả của 5 lần gieo mà mặt N xuất hiện đúng một lần: C_5^1

   Kết quả của 5 lần gieo mà mặt N xuất hiện đúng hai lần: C_5^2

   Số kết quả của 5 lần gieo mà số lần mặt S xuất hiện nhiều hơn số lần mặt N là: $n(C) = 32 - C_5^2 - C_5^1 = 17$.

Bài 3. Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên 5 thẻ. Tính số phần tử của:

1. Không gian mẫu.
2. Các biến cố: A: " Số ghi trên các tấm thẻ được chọn là số chẵn"
   B: " Có ít nhất một số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3".

Giải

1. Ta có $n(\Omega) = C_{100}^5$
2. Trong 100 tấm thẻ có 50 tấm được ghi các số chẵn, do đó $n(A) = C_{50}^5$

   Từ 1 đến 100 có 33 số chia hết cho 3. Do đó, số cách chọn 5 tấm thẻ mà không có tấm thẻ nào ghi số chia hết cho 3 là: C_{67}^5

   Vậy $n(B) = C_{100}^5 - C_{67}^5$.

Vấn đề 2. Tính xác suất theo định nghĩa cổ điển

I. PHƯƠNG PHÁP

- Tính xác suất theo thống kê ta sử dụng công thức:

$$P(A) = \frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$

- Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển ta sử dụng công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Bộ bài tú - lơ khơ có 52 quân bài. Rút ngẫu nhiên ra 4 quân bài. Tìm xác suất của các biến cố:

A: "Rút ra được tứ quý K "

B: "4 quân bài rút ra có ít nhất một con át"

C: "4 quân bài lấy ra có ít nhất hai quân bích".

Giải

Ta có số cách chọn ngẫu nhiên 4 quân bài là: $C_{52}^4 = 270725$.

Suy ra $n(\Omega) = 270725$

Vì bộ bài chỉ có 1 tứ quý K nên ta có $n(A) = 1$. Vậy $P(A) = \frac{1}{270725}$.

Vì có C_{48}^4 cách rút 4 quân bài mà không có con Át nào, suy ra:

$$N(b) = C_{52}^4 - C_{48}^4 \Rightarrow P(B) = \frac{15229}{54145}.$$

Vì trong bộ bài có 13 quân bích, số cách rút ra bốn quân bài mà trong đó số quân bích không ít hơn 2 là: $C_{13}^2.C_{39}^2 + C_{13}^3C_{39}^1 + C_{13}^4.C_{39}^0 = 69667$

Suy ra $n(C) = 69667 \Rightarrow P(C) = \frac{5359}{20825}$.

Ví dụ 2. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1. 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ 2. 3 viên bi lấy ra có không quá hai màu.

Giải

Gọi biến cố A:" 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ"

B: "3 viên bi lấy ra có không quá hai màu"

Số các lấy 3 viên bi từ 20 viên bi là: C_{20}^3 nên ta có: $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$

1. Số cách lấy 3 viên bi màu đỏ là: $C_8^3 = 56$ nên $|\Omega_A| = 56$

   Do đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.

2. Ta có: • Số cách lấy 3 viên bi chỉ có một màu: $C_8^3 + C_7^3 + C_5^3 = 101$

- Số các lấy 3 viên bi có đúng hai màu:

Đỏ và xanh: $C_{15}^3-\left(C_8^3+C_7^3\right)$

Đỏ và vàng: $C_{13}^3-\left(C_8^3+C_5^3\right)$

Vàng và xanh: $C_{12}^3-\left(C_5^3+C_7^3\right)$

Nên số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu: $C_{15}^3+C_{13}^3+C_{12}^3-2\left(C_8^3+C_7^3+C_5^3\right)=759$

Do đó: $\left|\Omega_B\right|=860$. Vậy $P(B)=\dfrac{\left|\Omega_B\right|}{|\Omega|}=\dfrac{860}{1140}=\dfrac{43}{57}$

Ví dụ 3. Chọn ngẫu nhiên 3 số trong 80 số tự nhiên 1,2,3,...,80

1. Tính xác suất của biến cố A: "trong 3 số đó có và chỉ có 2 số là bội số của 5".
2. Tính xác suất của biến cố B: "trong 3 số đó có ít nhất một số chính phương".

Giải

Số cách chọn 3 số từ 80 số là: $n(\Omega)=C_{80}^3=82160$

1. Từ 1 đến 80 có $\left[\dfrac{80}{5}\right]=16$ số chia hết cho 5 và có $80-16=64$ số không chia hết cho 5.

   Do đó: $n(A)=C_{64}^1.C_{16}^2 \Rightarrow P(A)=\dfrac{C_{64}^1.C_{16}^2}{C_{80}^3}=\dfrac{96}{1027}$.

2. Từ 1 đến 80 có 8 số chính phương là: 1,4,9,16,25,36,49,64.

   Số cách chọn 3 số không có số chính phương nào được chọn là: C_{72}^3

   Suy ra $n(B)=C_{80}^3-C_{72}^3 \Rightarrow P(B)=\dfrac{C_{80}^3-C_{72}^3}{C_{80}^3}=\dfrac{563}{2054}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Gieo con súc sắc 100 lần, kết quả thu được ghi ở bảng sau:

Số chấm	Số lần xuất hiện
1	14
2	18
3	30
4	12
5	14
6	12

Hãy tìm xác suất của các biến cố:

A: "mặt sáu chấm xuất hiện"

B: " mặt hai chấm xuất hiện"

C: " một mặt lẻ xuất hiện".

Giải

Xem việc tung con súc sắc là một phép thử ngẫu nhiên.

Số lần thực hiện phép thử: $N=100$

Số lần xuất hiện của biến cố A: 12. Suy ra : $P(A)=\dfrac{12}{100}=\dfrac{3}{25}$

Số lần xuất hiện của biến cố B: 18. Suy ra $P(B)=\dfrac{18}{100}=\dfrac{9}{50}$

Số lần xuất hiện của biến cố C: $14+30+14=58$. Suy ra $P(C)=\dfrac{58}{100}=\dfrac{29}{50}$.

Bài 2. Tung một đồng tiền hai lần. Tìm xác suất để hai lần tung đó:

1. Đều là mặt S
2. Một S một N.

Giải

Ta có không gian mẫu $\Omega=\{SS,SN,NN,NS\} \Rightarrow n(\Omega)=4$

Gọi các biến cố: A: " hai lần tung đều là mặt sấp"

B: " hai lần tung có một S một N"

Suy ra $A=\{SS\} \Rightarrow n(A)=1$; $B=\{SN,NS\} \Rightarrow n(B)=2$

1. Ta có: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{4}$.
2. Ta có: $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 3. Một bình đựng 16 viên bi, 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen, 3 viên bi đỏ.

1. Lấy ngẫu nhiên ba viên bi. Tính xác suất của các biến cố:

   A: "Lấy được 3 viên đỏ "

   B: " Lấy cả ba viên bi không có bi đỏ"

   C: " Lấy được 1 bi trắng,1 bi đen,1 bi đỏ".
2. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi.Tính xác suất của các biến cố :

   X: "Lấy đúng 1 viên bi trắng"

   Y: " Lấy đúng 2 viên bi trắng"
3. Lấy ngẫu nhiên 10 viên bi. Tính xác suất của biến cố D: "lấy được 5 viên bi trắng, 3 bi đen, 2 bi đỏ".

Giải

1. Ta có: $n(\Omega) = C_{16}^3 = 560$

$n(A) = C_3^3 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{560}$; $\quad n(B) = C_{13}^3 = 286 \Rightarrow P(B) = \frac{143}{280}$

$n(C) = C_7^1 C_6^1 C_3^1 = 126 \Rightarrow P(C) = \frac{9}{40}$

2. Ta có : $n(\Omega) = C_{16}^4 = 1820$

$n(X) = C_7^1.C_9^3 = 588 \Rightarrow P(X) = \frac{21}{65}$; $\quad n(Y) = C_7^2.C_9^2 = 756 \Rightarrow P(Y) = \frac{27}{65}$.

3. Ta có: $n(\Omega) = C_{16}^{10} = 8008$

$n(D) = C_7^5.C_6^3.C_3^2 = 1260 \Rightarrow P(D) = \frac{45}{286}$.

Bài 4. Trong một chiếc hộp có 7 viên bi trắng, 8 viên bi đỏ và 10 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 6 viên bi

1. Tính số phần tử của không gian mẫu.

2. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: " 6 viên bi lấy ra cùng một màu"

B: " có ít nhất một viên bi màu vàng"

C: " 6 viên bi lấy ra có đủ ba màu".

Giải

1. Ta có: $n(\Omega) = C_{25}^6 = 177100$

2. Ta có: $n(A) = C_7^6 + C_8^6 + C_{10}^6 = 245 \Rightarrow P(A) = \frac{7}{5060}$

Ta có: $n(\overline{B}) = C_{15}^6 \Rightarrow n(B) = C_{25}^6 - C_{15}^6 = 172095 \Rightarrow P(B) = \frac{447}{460}$

Ta có: Số cách lấy 6 viên bi cùng một màu: 245 cách.

Số cách lấy 6 viên bi gồm hai màu:

$$C_{15}^6 - \left(C_8^6 + C_7^6\right) + C_{17}^6 - \left(C_{10}^6 + C_7^6\right) + C_{18}^6 - \left(C_{10}^6 + C_8^6\right) = 35455.$$

Suy ra $n(C) = 177100 - 35455 - 245 = 141400$. Vậy $P(C) = \frac{202}{253}$.

Bài 5. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ. Tính xác suất để trong sấp bài chứa hai bộ đôi (hai con cùng thuộc 1 bộ, hai con thuộc bộ thứ 2, con thứ 5 thuộc bộ khác).

Giải

Gọi A là biến cố cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn hai bộ 2 có C_{13}^2 cách, mỗi bộ có C_4^2 cách vậy có :

$C_{13}^2.C_4^2.C_4^2$ cách . có 11 cách chọn bộ 1 .

Mỗi cách chọn bộ 1 có 4 cách chọn vậy có $C_{13}^2.C_4^2.C_4^2.11.4 = n(A)$;

$n(\Omega) = C_{52}^5$. Vậy $P(A) = \frac{198}{4165}$.

Bài 6. Một đoàn tàu có 7 toa ở một sân ga. Có 7 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau và chọn một toa một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất của các biến cố sau:

A: " Một toa 1 người, một toa 2 người, một toa có 4 người lên và bốn toa không có người nào cả"

B: " Mỗi toa có đúng một người lên".

Giải

Số cách lên toa của 7 người là: $|\Omega| = 7^7$.

1. Tính $P(A) = ?$

Ta tìm số khả năng thuận lợi của A như sau:

- Chọn 3 toa có người lên: A_7^3
- Với toa có 4 người lên ta có: C_7^4 cách chọn
- Với toa có 2 người lên ta có: C_3^2 cách chọn
- Người cuối cùng cho vào toa còn lại nên có 1 cách

Theo quy tắc nhân ta có: $|\Omega_A| = A_7^3.C_7^4.C_3^2$. Do đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{450}{16807}$.

2. Tính $P(B) = ?$

Mỗi một cách lên toa thỏa mãn yêu cầu bài toán chính là một hoán vị của 7 phần tử nên ta có: $|\Omega_B| = 7!$

Do đó: $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{7!}{7^7}$.

Bài 7. Một người bỏ ngẫu nhiên bốn lá thư vào 4 bì thư đã được ghi địa chỉ. Tính xác suất của các biến cố A: " Có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì của nó".

Giải

Số cách bỏ 4 lá thư vào 4 bì thư là: $|\Omega| = 4! = 24$

Kí hiệu 4 lá thư là: L_1, L_2, L_3, L_4 và bộ (L_1, L_2, L_3, L_4) là một hóa vị của các số 1,2,3,4 trong đó $L_i = i$ ($i = \overline{1,4}$) nếu lá thư L_i bỏ đúng địa chỉ.

Ta xét các khả năng sau:

- Có 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ: (1,2,3,4) nên có 1 cách bỏ
- Có 2 là thư bỏ đúng địa chỉ:

+) Số cách bỏ 2 lá thư đúng địa chỉ là: C_4^2

+) Khi đó có 1 cách bỏ hai là thư còn lại

Nên trường hợp này có: $C_4^2 = 6$ cách bỏ.

- Có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ:

Số cách chọn lá thư bỏ đúng địa chỉ: 4 cách

Số cách chọn bỏ ba lá thư còn lại: 2.1 = 2 cách

Nên trường hợp này có: 4.2 = 8 cách bỏ.

Do đó: $|\Omega_A| = 1 + 6 + 8 = 15$. Vậy $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{15}{24} = \dfrac{5}{8}$.

Bài 8. Gieo một con xúc sắc đồng chất cân đối ba lần liên tiếp. Tìm xác suất của các biến cố sau:

A: “ Tổng số chấm xuất hiện trong ba lần là 10”

B: “Có ít nhất một mặt chẵn xuất hiện”.

Giải

Ta có các khả năng xảy ra là: $|\Omega| = 6.6.6 = 216$

1. Gọi dãy (x_1, x_2, x_3) là kết quả theo thứ tự của ba lần gieo với $x_1, x_2, x_3 \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ có các bộ nghiệm (chưa tính hoán vị) là: $(1,3,6)$; $(1,4,5)$; $(2,2,6)$; $(2,3,5)$; $(2,4,4)$; $(3,4,3)$.

Với mỗi bộ nghiệm ba số phân biệt cho ta $3! = 6$ khả năng xảy ra, còn các bộ nghiệm $(2,2,6)$; $(2,4,4)$ và $(3,4,3)$ chỉ có ba khả năng xảy ra

Do đó $|\Omega_A| = 6.3 + 3.3 = 27$ nên $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{8}$.

2. Khả năng xuất hiện mặt lẻ của mỗi lần gieo là: 3

Suy ra khả năng ba lần gieo đều xuất hiện mặt lẻ là: $3^3 = 27$

Do đó $|\Omega_B| = 216 - 27 = 189$ nên $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{189}{216} = \dfrac{7}{8}$.

Vấn đề 3. Các quy tắc tính xác suất

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Mở rộng quy tắc cộng xác suất

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó:

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$.

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Giả sử A và B là hai biến cố tùy ý cùng liên quan đến một phép thử. Lúc đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

2. Quy tắc nhân xác suất

- Ta nói hai biến cố A và B độc lập nếu sự xảy ra (hay không xảy ra) của A không làm ảnh hưởng đến xác suất của B.
- Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B)$.

B. BÀI TOÁN 1: TÍNH XÁC SUẤT BẰNG QUY TẮC CỘNG

I. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng các quy tắc đếm và công thức biến cố đối, công thức biến cố hợp.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ với A và B là hai biến cố xung khắc
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một con súc sắc không đồng chất sao cho mặt bốn chấm xuất hiện nhiều gấp 3 lần mặt khác, các mặt còn lại đồng khả năng. Tìm xác suất để xuất hiện một mặt chẵn.

Giải

Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm $(i = 1,2,3,4,5,6)$

Ta có $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = P(A_6) = \dfrac{1}{3}P(A_4) = x$

Do $\sum\limits_{k=1}^{6} P(A_k) = 1 \Rightarrow 5x + 3x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{8}$

Gọi A là biến cố xuất hiện mặt chẵn, suy ra $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$

Vì các biến cố A_i xung khắc nên: $P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$.

Ví dụ 2. Gieo một con xúc sắc 4 lần. Tìm xác suất của biến cố:

A: " Mặt 4 chấm xuất hiện ít nhất một lần"

B: " Mặt 3 chấm xuất hiện đúng một lần"

Giải

1. Gọi A_i là biến cố " mặt 4 chấm xuất hiện lần thứ i " với $i = 1,2,3,4$.

Khi đó: $\overline{A_i}$ là biến cố " Mặt 4 chấm không xuất hiện lần thứ i "

Và $P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - P(A_i) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Ta có: $\overline{A}$ là biến cố: " không có mặt 4 chấm xuất hiện trong 4 lần gieo"

Và $\overline{A} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}$. Vì các A_i độc lập với nhau nên ta có:

$$P(\overline{A}) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_4}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Vậy $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

2. Gọi B_i là biến cố " mặt 3 chấm xuất hiện lần thứ i " với $i = 1,2,3,4$

Khi đó: $\overline{B_i}$ là biến cố " Mặt 3 chấm không xuất hiện lần thứ i "

Ta có: $A = \overline{B_1}.B_2.B_3.B_4 \cup B_1.\overline{B_2}.B_3.B_4 \cup B_1.B_2.\overline{B_3}.B_4 \cup B_1.B_2.B_3.\overline{B_4}$

Suy ra $P(A) = P\left(\overline{B_1}\right)P(B_2)P(B_3)P(B_4) + P(B_1)P\left(\overline{B_2}\right)P(B_3)P(B_4)$

$$+P(B_1)P(B_2)P\left(\overline{B_3}\right)P(B_4) + P(B_1)P(B_2)P(B_3)P\left(\overline{B_4}\right)$$

Mà $P(B_i) = \frac{1}{6}$, $P\left(\overline{B_i}\right) = \frac{5}{6}$. Do đó: $P(A) = 4.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\frac{5}{6} = \frac{5}{324}$.

Ví dụ 3. Một hộp đựng 4 viên bi xanh,3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi:

1. Tính xác suất để chọn được 2 viên bi cùng màu.

2. Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.

Giải

1. Gọi A là biến cố "Chọn được 2 viên bi xanh"; B là biến cố "Chọn được 2 viên bi đỏ", C là biến cố "Chọn được 2 viên bi vàng" và X là biến cố "Chọn được 2 viên bi cùng màu".

Ta có $X = A \cup B \cup C$ và các biến cố A,B,C đôi một xung khắc.

Do đó, ta có: $P(X) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Mà: $P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{1}{12}; P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$

Vậy $P(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

2. Biến cố "Chọn được 2 viên bi khác màu" chính là biến cố $\overline{X}$.

Vậy $P(\overline{X}) = 1 - P(X) = \frac{13}{18}$.

C. BÀI TOÁN 02: TÍNH XÁC SUẤT BẰNG QUY TẮC NHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP

Để áp dụng quy tắc nhân ta cần:

- Chứng tỏ A và B độc lập
- Áp dụng công thức: $P(AB) = P(A).P(B)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho 3 lần sinh có ít nhất 1 con trai.

Giải

Gọi A là biến cố ba lần sinh có ít nhất 1 con trai, suy ra $\overline{A}$ là xác suất 3 lần sinh toàn con gái.

Gọi B_i là biến cố lần thứ i sinh con gái ($i = 1,2,3$)

Suy ra $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 0,49$

Ta có: $\overline{A} = B_1 \cap B_2 \cap B_3$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 1 - (0,49)^3 \approx 0,88$.

Ví dụ 2. Hai cầu thủ sút phạt đền. Mỗi người đá 1 lần với xác suất làm bàn tương ứng là 0,8 và 0,7. Tính xác suất để có ít nhất 1 cầu thủ làm bàn

Giải

Gọi A là biến cố cầu thủ thứ nhất làm bàn

B là biến cố cầu thủ thứ hai làm bàn

X là biến cố ít nhất 1 trong hai cầu thủ làm bàn

Ta có: $X = (A \cap \overline{B}) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow P(X) = P(A).P(\overline{B}) + P(B).P(\overline{A}) + P(A).P(B) = 0,94$.

Ví dụ 3. Một đề trắc nghiệm gồm 20 câu, mỗi câu có 4 đáp án và chỉ có một đáp án đúng. Bạn An làm đúng 12 câu, còn 8 câu bạn An đánh hú họa vào đáp án mà An cho là đúng. Mỗi câu đúng được 0,5 điểm. Hỏi An có khả năng được bao nhiêu điểm?

Giải

An làm đúng 12 câu nên có số điểm là $12.0,5=6$

Xác suất đánh hú họa đúng của mỗi câu là $\frac{1}{4}$, do đó xác suất để An đánh đúng 8 câu còn lại là: $\left(\frac{1}{4}\right)^8=\frac{1}{4^8}$

Vì 8 câu đúng sẽ có số điểm $8.0,5=4$

Nên số điểm có thể của An là: $6+\frac{1}{4^8}.4=6+\frac{1}{4^7}$

Ví dụ 4. Một hộp đựng 40 viên bi trong đó có 20 viên bi đỏ, 10 viên bi xanh, 6 viên bi vàng, 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi, tính xác suất biến cố:

A: "2 viên bi cùng màu".

Giải

Ta có: $|\Omega|=C_{40}^2$

Gọi các biến cố: D: "lấy được 2 bi viên đỏ" ta có: $|\Omega_D|=C_{20}^2=190$;

X: "lấy được 2 bi viên xanh" ta có: $|\Omega_X|=C_{10}^2=45$;

V: "lấy được 2 bi viên vàng" ta có: $|\Omega_V|=C_6^2=15$;

T: " lấy được 2 bi màu trắng" ta có: $|\Omega_T|=C_4^2=6$.

Ta có D, X, V, T là các biến cố đôi một xung khắc và $A=D\cup X\cup V\cup T$

$$P(A)=P(D)+P(X)+P(V)+P(T)=\frac{256}{C_{40}^2}=\frac{64}{195}.$$

Ví dụ 5. Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được con trai (Sinh được con trai rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh nữa). Xác suất sinh được con trai trong một lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2.

Giải

Gọi A là biến cố: " Sinh con gái ở lần thứ nhất", ta có:

$P(A)=1-0,51=0,49$.

Gọi B là biến cố: " Sinh con trai ở lần thứ hai", ta có: $P(B)=0,51$

Gọi C là biến cố: "Sinh con gái ở lần thứ nhất và sinh con trai ở lần thứ hai"

Ta có: $C=AB$, mà A, B độc lập nên ta có: $P(C)=P(AB)=P(A).P(B)=0,2499$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Một hộp đựng 10 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh, 2 viên bi vàng, 1 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi, tính xác suất biến cố: A: "2 viên bi cùng màu".

Giải

Ta có: $n(\Omega)=C_{10}^2$

Gọi các biến cố: D: "lấy được 2 viên đỏ" ; X: "lấy được 2 viên xanh";
V: "lấy được 2 viên vàng"

Ta có D, X, V là các biến cố đôi một xung khắc và $C=D\cup X\cup V$

$$P(C)=P(D)+P(X)+P(V)=\frac{2}{5}+\frac{C_3^2}{45}+\frac{1}{15}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}.$$

Bài 2. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố X: "lấy được vé không có chữ số 2 hoặc chữ số 7".

Giải

Ta có $n(\Omega)=10^5$

Gọi A: "lấy được vé không có chữ số 2"

B: "lấy được vé số không có chữ số 7"

Suy ra $n(A)=n(B)=9^5\Rightarrow P(A)=P(B)=(0,9)^5$

Số vé số trên đó không có chữ số 2 và 7 là: 8^5, suy ra $n(A\cap B)=8^5$

$\Rightarrow P(A\cap B)=(0,8)^5$

Do $X=A\cup B\Rightarrow P(X)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8533$.

Bài 3. Cho ba hộp giống nhau, mỗi hộp 7 bút chì khác nhau về màu sắc

Hộp thứ nhất: Có 3 bút màu đỏ, 2 bút màu xanh, 2 bút màu đen

Hộp thứ hai: Có 2 bút màu đỏ, 2 màu xanh, 3 màu đen

Hộp thứ ba: Có 5 bút màu đỏ, 1 bút màu xanh, 1 bút màu đen

Lấy ngẫu nhiên một hộp, rút hú họa từ hộp đó ra 2 bút

Tính xác suất của biến cố A: "Lấy được hai bút màu xanh"

Tính xác suất của xác suất B: "Lấy được hai bút không có màu đen".

Giải

Gọi X_i là biến cố rút được hộp thứ i , $i=1,2,3 \Rightarrow P(X_i)=\frac{1}{3}$

Gọi A_i là biến cố lấy được hai bút màu xanh ở hộp thứ i, $i=1,2,3$

Ta có: $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{C_7^2}, P(A_3)=0$. Vậy $P(A)=\frac{1}{3}\left(2.\frac{1}{C_7^2}+0\right)=\frac{2}{63}$.

Gọi B_i là biến cố rút hai bút ở hộp thứ i không có màu đen.

$P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_7^2}, P(B_2)=\frac{C_4^2}{C_7^2}, P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_7^2}$. Vậy có $P(B)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2+C_4^2+C_6^2}{C_7^2}\right)=\frac{31}{63}$.

Bài 4. Cả hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Xác suất người thứ nhất bắn trúng bia là 0,8; người thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Hãy tính xác suất để:

1. Cả hai người cùng bắn trúng ;
2. Cả hai người cùng không bắn trúng;
3. Có ít nhất một người bắn trúng.

Giải

1. Gọi A_1 là biến cố " Người thứ nhất bắn trúng bia"

   A_2 là biến cố " Người thứ hai bắn trúng bia"

   Gọi A là biến cố "cả hai người bắn trúng", suy ra $A=A_1\cap A_2$

   Vì A_1, A_2 là độc lập nên $P(A)=P(A_1)P(A_2)=0,8.0,7=0,56$

2. Gọi B là biến cố "Cả hai người bắn không trúng bia".

   Ta thấy $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$. Hai biến cố $\overline{A_1}$ và $\overline{A_2}$ là hai biến cố độc lập nên

   $P(B)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=[1-P(A_1)][1-P(A_2)]=0,06$

3. Gọi C là biến cố "Có ít nhất một người bắn trúng bia", khi đó biến cố đối của B là biến cố C. Do đó $P(C)=1-P(D)=1-0,06=0,94$

Bài 5. Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7 . Hãy tính xác suất để

1. Cả hai động cơ đều chạy tốt ;
2. Cả hai động cơ đều không chạy tốt;
3. Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

Giải

1. Gọi A là biến cố "Động cơ I chạy tốt", B là biến cố "Động cơ II chạy tốt" C là biến cố "Cả hai động cơ đều chạy tốt".Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập với nhau và $C=AB$.

   Ta có $P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=0,56$

2. Gọi D là biến cố "Cả hai động cơ đều chạy không tốt".Ta thấy $D=\overline{A}\,\overline{B}$.

   Hai biến cố $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập với nhau nên $P(D)=(1-P(A))(1-P(B))=0,06$.

3. Gọi K là biến cố "Có ít nhất một động cơ chạy tốt",khi đó biến cố đối của K là biến cố D. Do đó $P(K)=1-P(D)=0,94$.

Bài 6. Có hai xạ thủ I và xạ thủ II. Xác suất bắn trúng của I là 0,9; xác suất của II là 0,8 lấy ngẫu nhiên một trong hai xạ thủ, bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn bắn ra trúng đích.

Giải

Gọi B_i là biến cố "Xạ thủ được chọn" là i, $i=1,2$

A là biến cố viên đạn trúng đích. Ta có :

$P(B_i)=\frac{2}{10}, P(B_2)=\frac{8}{10}$ & $P(A/B_1)=0,9P(A/B_2)=0,8$

Nên $P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\frac{2}{10}.\frac{9}{10}+\frac{8}{10}.\frac{8}{10}=0,82$.

Bài 7. Một hộp đựng 10 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh, 2 viên bi vàng, 1 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi, tính xác suất biến cố :

1. 2 viên lấy ra màu đỏ
2. 2 viên bi một đỏ,1 vàng
3. 2 viên bi cùng màu.

Giải

$\Omega=C_{10}^2$; A là biến cố câu a, B là biến cố câu b, C là biến cố câu c.

1. $n(A)=C_4^2 \Rightarrow P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$

2. $n(B)=C_4^1.C_2^1 \Rightarrow P(B)=\frac{C_4^1.C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{45}$

3. D là biến cố 2 viên đỏ ,X là biến cố 2 viên xanh, V là biến cố 2 viên vàng Đ , X, V là các biến cố đôi một xung khắc

   $P(C)=P(D)+P(X)+P(V)=\frac{2}{5}+\frac{C_3^2}{45}+\frac{1}{15}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$.

Bài 8. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc 6 lần. Tính xác suất để một số lớn hơn hay bằng 5 xuất hiện ít nhất 5 lần trong 6 lần gieo.

Giải

Gọi A là biến cố một số lớn hơn hay bằng 5 chấm trong mỗi lần gieo. A xảy ra, con xúc xắc xuất hiện mặt 5, chấm hoặc 6 chấm ta có $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Trong 6 lần gieo xác suất để biến cố A xảy ra đúng 6 lần $P(A.A.A.A.A.A)=\left(\frac{1}{3}\right)^6$

Xác suất để được đúng 5 lần xuất hiện A và 1 lần không xuất hiện A theo một thứ tự nào đó $\left(\frac{1}{3}\right)^5.\frac{2}{3}$

Vì có 6 cách để biến cố này xuất hiện : $6.\left(\frac{1}{3}\right)^5.\frac{2}{3}=\frac{12}{729}$

Vậy xác xuất để A xuất hiện ít nhất 5 lần là $\frac{12}{729}+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}$.

Bài 9. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố X: "lấy được vé không có chữ số 1 hoặc chữ số 2".

Giải

Ta có $|\Omega|=10^5$

Gọi A: "lấy được vé không có chữ số 1"

B: "lấy được vé số không có chữ số 2"

Suy ra $|\Omega_A|=|\Omega_B|=9^5 \Rightarrow P(A)=P(B)=(0,9)^5$

Số vé số trên đó không có chữ số 1 và 2 là: 8^5, suy ra $|\Omega_{A\cap B}|=8^5$

Nên ta có: $P(A\cap B)=(0,8)^5$

Do $X=A\cup B$. Vậy $P(X)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8533$.

Bài 10. Một máy có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09, mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu có ít nhất hai động cơ làm việc. Tìm xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.

Giải

Gọi A là biến cố: "Máy bay bay an toàn".

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố: "Máy bay bay không an toàn".

Ta có máy bay bay không an toàn khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

TH 1: Cả 5 động cơ đều bị hỏng

Ta có xác suất để xảy ra trường hợp này là: $(0,09)^3.(0,04)^2$

TH 2: Có một động cơ ở cánh phải hoạt động và các động cơ còn lại đều bị hỏng. Xác suất để xảy ra trường hợp này là: $3.(0,09)^2.0,91.(0,04)^2$

TH 3: Có một động cơ bên cánh trái hoạt động, các động cơ còn lại bị hỏng

Xác suất xảy ra trường hợp này là: $2.0,04.0,96.(0,09)^3$

$$P(\overline{A})=(0,09)^3.(0,04)^2+3.(0,09)^2.0,91.(0,04)^2+2.0,04.0,96.(0,09)^3=0,925344.10^{-4}$$

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=0,9999074656$.

Bài 11. Ba cầu thủ sút phạt đến 11m, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là x, y và 0,6 (với $x>y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi ban là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

Giải

Gọi A_i là biến cố "người thứ i ghi bàn" với $i=1,2,3$.

Ta có các A_i độc lập với nhau và $P(A_1)=x$, $P(A_2)=y$, $P(A_3)=0,6$.

Gọi: A là biến cố: " Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn"

B: " Cả ba cầu thủ đều ghi bàn"

C: "Có đúng hai cầu thủ ghi bàn"

Ta có: $\overline{A}=\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} \Rightarrow P(\overline{A})=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})=0,4(1-x)(1-y)$

Nên $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,4(1-x)(1-y)=0,976$

Suy ra $(1-x)(1-y)=\frac{3}{50} \Leftrightarrow xy-x-y=-\frac{47}{50}$ (1).

Tương tự: $B=A_1.A_2.A_3$, suy ra:

$P(B)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)=0,6xy=0,336$ hay là $xy=\frac{14}{25}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} xy=\frac{14}{25} \\ x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$, giải hệ này kết hợp với $x>y$ ta tìm được $x=0,8$ và $y=0,7$.

Ta có: $C=\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$

Nên $P(C)=(1-x)y.0,6+x(1-y).0,6+xy.0,4=0,452$.

Bài 12. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

Giải

Ta có xác suất để học sinh trả lời câu đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất trả lời câu sai là $\frac{3}{4}$.

Gọi x là số câu trả lời đúng, khi đó số câu trả lời sai là $10-x$

Số điểm học sinh này đạt được là : $4x-2(10-x)=6x-20$

Nên học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $6x-20<1 \Leftrightarrow x<\frac{21}{6}$

Mà x nguyên nên x nhận các giá trị: $0,1,2,3$.

Gọi A_i $(i=0,1,2,3)$ là biến cố: "Học sinh trả lời đúng i câu"

A là biến cố: " Học sinh nhận điểm dưới 1"

Suy ra: $A=A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ và $P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

Mà: $P(A_i)=C_{10}^{i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$ nên $P(A)=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^{i}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}=0,7759$.

Vấn đề 4. Biến cố ngẫu nhiên

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc

Biến ngẫu nhiên hay đại lượng ngẫu nhiên là một quy tắc cho ứng mỗi kết quả của phép thử với một số thực:

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên và a là một giá trị của nó. biến cố "X nhận giá trị a" được kí hiệu là $[X=a]$ hay $(X=a)$

Giải sử X có tập các giá trị là $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Đặt: $p_1=P(X=x_1), \ldots, p_n=P(X=x_n)$. Ta có bảng sau đây gọi là bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

X	x_1	x_2	…		…	x_n
P	p_1	p_2	…		…	p_n

2. Kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn.

Giả sử X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối (1). Kì vọng của X, kí hiệu E (X), là một số được cho bởi công thức: $E(X)=x_1p_1+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$ (2)

Phương sai của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $V(X)$, là một số được cho bởi công thức: $V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(E(X)\right)^2$

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu: $\sigma(X)$, là một số được cho bởi công thức: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Kì vọng của X là số đặc trưng cho giá trị trung bình của X.

Phương sai là độ lệch chuẩn là số đặc trưng cho độ phân tán của X so với kì vọng của X.

B. BÀI TOÁN 1: LẬP BẢNG PHÂN BỐ XÁC SUẤT

I. PHƯƠNG PHÁP: Để lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X ta làm như sau:

- Tìm tập giá trị của X

  Để tìm tập giá trị của X ta có thể tiến hành theo hai cách sau:

* **Cách 1:** Dựa vào cách mô tả của X ta có thể liệt kê được các giá trị của X có thể nhận, không cần mô tả không gian mẫu.

* **Cách 2:** Liệt kê các kết quả của không gian mẫu Ω; với mỗi kết quả a, tính giá trị X(a) của biến cố X tại a. Từ đó ta có tập giá trị của $X(\Omega)$.

- Giả sử $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tính $p_i=P(X=x_i)=\frac{|(X=x_i)|}{\Omega}$
- Lập bảng phân bố xác suất.

II. VÍ DỤ

Ta có hai hộp bi: hộp 1 có 3 bi trắng và 1 bi đỏ; hộp 2 có 2 bi trắng và 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 1 ra 2 viên bi và bỏ vào hộp 2. Sau đó, lấy ngẫu nhiên từ hộp 2 ra 2 viên bỏ vào hộp 1. Gọi X là số bi trắng ở hộp 1 sau hai lần chuyển bi như trên. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Giải

- Lấy 2 viên từ hộp 1. Có thể có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: 1 đỏ, 1 trắng, suy ra hộp 1 có 2 trắng, hộp 2 có 3 đỏ, 3 trắng

Trường hợp 2: 2 trắng, suy ra hộp 1 có 1 trắng, 1đỏ, hộp 2 có 4 trắng, 2 đỏ

- Lấy 2 viên từ hộp 2.

– Với **Trường hợp 1** ta có 3 khả năng:

Khả năng 1: 1 đỏ, 1 trắng suy ra hộp 2 có 2 đỏ, 2 trắng, hộp 1 có 3 trắng, 1 đỏ.

Khả năng 2: 2 đỏ, suy ra hộp 2 có 1 đỏ, 3 trắng; hộp 1 có 2 đỏ, 2 trắng.

Khả năng 3: 2 trắng, suy ra hộp 2 có 3 đỏ, 1 trắng; hộp 1 có 4 trắng

– Với **Trường hợp 2** ta có các khả năng sau:

Khả năng 1: 1 đỏ, 1 trắng, suy ra hộp 2 có 1 đỏ, 3 trắng, hộp 1 có 2 trắng, 2 đỏ.

Khả năng 2: 2 đỏ, suy ra hộp 2 có 4 trắng; hộp 1 có 3 đỏ, 1 trắng.

Khả năng 3: 2 trắng suy ra hộp 2 có 2 đỏ, 2 trắng; hộp 1 có 3 trắng, 1 đỏ.

Vậy sau khi chuyển qua, chuyển về thì hộp 1 có thể có $X = 1, 2, 3, 4$ và hộp 2 có $Y = 1, 2, 3, 4$.

Ta có: $P(X=1)=$ P(lần đầu chọn 2 trắng và lần sau chọn 2 đỏ)

Suy ra: $$P(X=1)=\frac{C_3^2}{C_4^2}.\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{30}$$

Tương tự: $$P\left(X=2\right)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{C_3^2}{C_4^2}.\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{11}{30}$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}.\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}+\frac{C_3^2}{C_4^2}.\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=4)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_4^2}.\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{10}$$

Bảng phân bố xác suất:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

C. BÀI TOÁN 2: TÍNH KỲ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI

I. PHƯƠNG PHÁP: Để tính kỳ vọng và phương sai của biến cố ngẫu nhiên X ta làm như sau:

- Tìm tập giá trị $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$
- Lập bảng phân bố xác suất:

X	x_1	x_2	…		…	x_n
P	p_1	p_2	…		…	p_n

- Tính kì vọng theo công thức: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$
- Tính phương sai theo công thức:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(E(X)\right)^2.$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Ta có hai hộp bi: hộp 1 có 3 bi trắng và 1 bi đỏ; hộp 2 có 2 bi trắng và 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 1 ra 2 viên bi và bỏ vào hộp 2. Sau đó, lấy ngẫu nhiên từ hộp 2 ra 2 viên bỏ vào hộp 1. Gọi X là số bi trắng ở hộp 1 sau hai lần chuyển bi như trên. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X.

Giải

Ta có bảng phân bố xác suất:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Kì vọng của X là: $E(X)=1.\frac{1}{30}+2.\frac{11}{30}+3.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{10}=\frac{8}{3}$

Phương sai của X là: $V(X)=\left(1-\frac{8}{3}\right)^2.\frac{1}{30}+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2.\frac{11}{30}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2.\frac{1}{2}+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2.\frac{1}{10}=\frac{22}{45}$

Độ lệch chuẩn của X: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 0,699$.

Ví dụ 2. Số vụ vi phạm an toàn giao thông trên một đoạn đường vào giờ cao điểm làm một biến ngẫu nhiên rời rạc và cho biết $X\in\{0,1,2,3,4,5\}$:

$P(X=0)=0,2$, $P(X=1)=0,15$, $P(X=2)=0,15$, $P(X=3)=0,4$,

$P(X=4)=0,05$, $P(X=6)=0,05$.

1. Lập bảng phân bố xác suất và tính xác suất để trên đoạn đường đó vào giờ cao điểm có không quá 3 vụ vi phạm an toàn giao thông;
2. Tính kì vọng và phương sai của X.

Giải

1. Ta có bảng phân bố như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,4	0,15	0,15	0,2	0,05	0,05

$P(X\le 3)=0,4+0,15+0,15+0,2=0,9$.

2. Ta có: $E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 0.0,4+1.0,15+2.0,15+3.0,2+4.0,05+5.0,05$

Suy ra: $E(X)=1,95$.

Phương sai: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(E(X))^2=2,5975$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét phép thử gieo một đồng tiền 3 lần:

1. Xác định không gian mẫu
2. Gọi X là số lần xuất hiện mặt gấp S, hãy liệt kê các giá trị mà X có thể nhận.
3. Tính các xác suất để X nhận các giá trị đó. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Giải

1. Trong phép thử gieo đồng tiền 3 lần, không gian mẫu gồm $2^3 = 8$ phần tử.

$\Omega=\{SSS,\ SSN,\ SNS,\ NSS,\ SNN,\ NSN,\ NNS,\ NNN\}$

2. X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3. Chẳng hạn: "X nhận giá trị 1": khi xảy ra một trong các kết quả SNN, NSN, NNS, nghĩa là: $(X=1)=\{SNN,\ NSN,\ NNS\}$

3. Vì $(X=0)=\{NNN\}$ nên $P(X=0)=\frac{1}{8}$

Tương tự $(X=1)=\{NNS,\ SNN,\ NSN\}$ nên $P(X=1)=\frac{3}{8}$

$(X=2)=\{SSN,\ SNS,\ NSS\}$ nên $P(X=2)=\frac{3}{8}$

$(X=3)=\{SSS\}$ nên $P(X=3)=\frac{1}{8}$

Từ đó ta có bảng phân phối sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bài 2. Từ một hộp có 3 bi xanh và 6 bi đỏ, chọn ngẫu nhiên 4 bi. Gọi X là số bi xanh trong 4 bi đã chọn.

1. Lập bảng phân phối xác suất của X.
2. Tính xác suất sao cho trong 4 bi đã chọn có ít nhất 1 bi xanh
3. Tính xác suất sao cho trong 4 bi đã chọn có nhiều nhất 2 bi đỏ,
4. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Giải

1. X có tập giá trị là 0,1,2,3

Ta có: $P(X=k)=\frac{C_3^k C_6^{4-k}}{C_9^4}$, $k=0,1,2,3$

Từ đó ta có bảng phân phối sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{15}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{6}{126}$

2. Kí hiệu $(X\geq a)$ là biến cố "X nhận giá trị lớn hơn hoặc bằng a ".

Ta tính $P(X\geq 1)$

Vì $(X\geq 1)$ là biến cố đối của biến cố $(X=0)$ nên:

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{5}{126}=\frac{111}{126}$

3. Vì số bi đỏ được lấy là $4-X\Rightarrow X\geq 2$ nên $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{51}{126}$.

4. Ta có: $E(X)=0.\frac{15}{126}+1.\frac{60}{126}+2.\frac{45}{126}+3.\frac{6}{126}=\frac{4}{3}$

$V(X)=0^2.\frac{15}{126}+1^2.\frac{60}{126}+2^2.\frac{45}{126}+3^2.\frac{6}{126}-(E(X))^2=\frac{5}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài 3. Một túi chứa 4 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Hai người chơi A và B lần lượt rút một quả cầu trong túi (rút xong không trả lại vào túi).Trò chơi kết thúc khi có người rút được quả cầu đen. Người đó xem như thua cuộc và phải trả cho người kia số tiền là X (X bằng số quả cầu đã rút ra nhân với 5USD).

1. Giả sử A là người rút trước và X là số tiền A thu được. Lập bảng phân bố xác suất của X. Tính E(X).
2. Nếu chơi 150 ván thì trung bình A được bao nhiêu.

Giải

1. Gọi D là bi đen, T là bi trắng ta có các trường hợp sau:

D, TD, TTD, TTTD, TTTTD

Khi đó X nhận các giá trị: −5,10,−15,20,−25

Bảng phân bố xác suất:

X	–5	10	–15	20	–25
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{7}$

Kì vọng của X: $E(X) = -\frac{6}{7}$.

2. Bình quân mỗi ván A thua $-\frac{6}{7}$ USD nên nếu chơi 150 ván thì số tiền A thua là: $\frac{6}{7}.150 \approx 128,6$ USD.

Bài 4. Trong một chiếc hộp có 7 bóng đèn, trong đó có 5 bóng tốt và 2 bóng bị hỏng. Ta chọn ngẫu nhiên từng bóng đèn để thử (khi thử xong không trả lại) cho đến khi tìm được hai bóng bị hỏng. Gọi X là số lần thử cần thiết:

1. Lập bảng phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X.
2. Trung bình cần bao nhiêu lần thử.

Giải

1. Gọi A_i là biến cố " Lần thứ i lấy bóng tốt" thì $\overline{A_i}$ là biến cố: "lần thứ i lấy bóng hỏng".

Ta có X là đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị trong tập $\{2,3,4,5,6,7\}$

Ta tính $P(X=2)$?

Ta có: $P(X=2) = P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right)$

Xác suất chọn được bóng hỏng ở lần thứ nhất là: $\frac{2}{7}$

Xác suất chọn được bóng hỏng ở lần thứ hai là: $\frac{1}{6}$

Nên $P(X=2) = \frac{2}{7}.\frac{1}{6} = \frac{1}{21}$.

Tương tự: $P(X=3) = P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right) + P(\overline{A_1})P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right) = \frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5} + \frac{2}{7}.\frac{5}{6}.\frac{1}{5} = \frac{2}{21}$.

$$P(X=4) = P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_4}\right) + P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)P\left(\overline{A_4}\right) +$$

$$+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P(A_3)P\left(\overline{A_4}\right) = \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}.\frac{1}{4} + \frac{2}{7}.\frac{5}{6}.\frac{4}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=5) = P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P\left(\overline{A_5}\right) +$$

$$+ P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)P(A_4)P\left(\overline{A_5}\right) + P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)P(A_4)P\left(\overline{A_5}\right)$$

$$+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P\left(\overline{A_4}\right)P\left(\overline{A_5}\right) =$$

$$= \frac{2}{7}.\frac{5}{6}.\frac{4}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{4}{21}$$

$$P(X=6) = \frac{5}{21}$$

$$P(X=7) = 1 - \sum_{i=2}^{6} P(X=i) = \frac{6}{21}.$$

Bảng phân bố xác suất:

X	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. Ta có: $E(X) = 2.\frac{1}{21} + 3.\frac{2}{21} + 4.\frac{1}{7} + 5.\frac{4}{21} + 6.\frac{5}{21} + 7.\frac{6}{21} = \frac{104}{21}$

Vậy trung bình cần 5 lần thử.

Bài 5. Có một khối lập phương được tạo thành từ 729 hình lập phương nhỏ giống hệt nhau. Ở mỗi mặt, chính giữa khoét một dãy khối lập phương nhỏ xuyên từ tâm mặt này sang tâm mặt đối diện (có ba dãy, mỗi dãy chín khối). Lấy sơn bôi lên toàn bộ bề mặt trong ngoài của hình lập phương lớn. Lấy ngẫu nhiên một khối lập phương nhỏ trong đó. Tính xác suất để:

1. Khối đó chỉ có một mặt bị bôi đen.
2. Khối đó chỉ có hai mặt bị bôi đen.
3. Khối đó có ba mặt bị bôi đen.
4. Khối đó không có mặt nào bị bôi đen.

Giải

Gọi T là biến cố: "lấy ngẫu nhiên một khối lập phương nhỏ trong hình lập phương"

A "Khối đó chỉ có một mặt bị bôi đen".

B "Khối đó chỉ có hai mặt bị bôi đen".

C "Khối đó có ba mặt bị bôi đen".

D "Khối đó không có mặt nào bị bôi đen".

Dựa vào sự quan sát hình vẽ, ta có: $|\Omega| = 729, |\Omega_A| = 302, |\Omega_B| = 158,$

$|\Omega_C| = 12, |\Omega_D| = 257$

Do đó: $P(A) = \frac{302}{729}$, $P(B) = \frac{158}{729}$, $P(C) = \frac{4}{243}$, $P(D) = \frac{257}{729}$.

Bài 6. Có 3 chiếc xe ôtô màu đỏ, 2 ôtô màu vàng, 1 ôtô màu xanh cùng đỗ bên đường. Tìm xác suất để không có 2 chiếc xe cùng màu nào đỗ cạnh nhau.

Giải

Gọi A là biến cố "không có 2 chiếc xe cùng màu nào đỗ cạnh nhau"

Ta có: $|\Omega| = 6! = 720$

Tính các khả năng của biến cố A. Đánh số thứ tự của các xe từ 1 đến 6, số thứ tự các vị trí từ I đến VI

Trường hợp 1: Xe đỏ thứ nhất ở vị trí I, xe đỏ thứ hai ở vị trí III, xe đỏ thứ ba ở vi trí V. Số cách đỗ xe là: $3!.3! = 36$.

Trường hợp 2: Xe đỏ thứ nhất ở vị trí I, xe đỏ thứ hai ở vị trí IV, xe đỏ thứ ba ở vi trí VI. Số cách đỗ xe là: $3!.2.2 = 24$.

Trường hợp 3: Xe đỏ thứ nhất ở vị trí II, xe đỏ thứ hai ở vị trí IV, xe đỏ thứ ba ở vi trí VI. Số cách đỗ xe là: $3!.3! = 36$.

Trường hợp 4: Xe đỏ thứ nhất ở vị trí I, xe đỏ thứ hai ở vị trí III, xe đỏ thứ ba ở vi trí VI. Số cách đỗ xe là: $3!.2.2 = 24$.

Vậy $|\Omega_A| = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$.

Bài 7. Một máy có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09, mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu mỗi cánh có ít nhất một động cơ làm việc. Tìm xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.

Giải

Gọi A_1: " Có ít nhất một động cơ cánh trái hoạt động"

A_2: " Có ít nhất một động cơ cánh phải hoạt động"

Ta có: $P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - (0,04)^3 \approx 0,9999$

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - (0,09)^2 = 0,9919$$

Gọi A là biến cố : "Máy bay thực hiện chuyến bay an toàn":

$$A = A_1.A_2 \Rightarrow P(A) = P(A_1).P(A_2) = 0,9918.$$

CHỦ ĐỀ 3: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

CHƯƠNG 1: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nội dung phương pháp quy nạp toán học:

Cho n_0 là một số nguyên dương và $P(n)$ là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$. Nếu

(1) $P(n_0)$ là đúng và

(2) Nếu $P(k)$ đúng, thì $P(k+1)$ cũng đúng với mọi số tự nhiên $k \ge n_0$; thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$.

Khi ta bắt gặp bài toán:

Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0, n_0 \in \mathbb{N}$ ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp như sau :

* *Bước 1:* Kiểm tra $P(n_0)$ có đúng hay không. Nếu bước này đúng thì ta chuyển qua bước hai
* *Bước 2:* Với $k \ge n_0$, giả sử $P(k)$ đúng ta cần chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

Kết luận: $P(n)$ đúng với $\forall n \ge n_0$.

Lưu ý: Bước 2 gọi là bước quy nạp, mệnh đề $P(k)$ đúng gọi là giả thiết quy nạp.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Dùng quy nạp để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

I. PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp: Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n) = Q(n)$ (hoặc $P(n) > Q(n)$) đúng với $\forall n \ge n_0, n_0 \in \mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

* *Bước 1:* Tính $P(n_0), Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0) = Q(n_0)$
* *Bước 2:* Giả sử $P(k) = Q(k); k \in \mathbb{N}, k \ge n_0$, ta cần chứng minh :

$$P(k+1) = Q(k+1).$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Giải

Đặt $P(n)=1+2+3+...+n$: tổng n số tự nhiên đầu tiên: $Q(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

Ta cần chứng minh $P(n)=Q(n)\ \forall n\in \mathbb{N}, n\ge 1$.

* *Bước 1:* Với $n=1$ ta có $P(1)=1, Q(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$

$\Rightarrow P(1)=Q(1)\Rightarrow (1)$ đúng với $n=1$.

* *Bước 2:* Giả sử $P(k)=Q(k)$ với $k\in \mathbb{N}, k\ge 1$ tức là:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}\quad (1)$$

Ta cần chứng minh $P(k+1)=Q(k+1)$, tức là:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\quad (2)$$

Thật vậy: Vế trái (2) $=(1+2+3+...+k)+(k+1)$

$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$ (Do đẳng thức (1))

$=(k+1)(\frac{k}{2}+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=VP(2)$

Vậy đẳng thức cho đúng với mọi $n\ge 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ ta luôn có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$.

Giải

- Với $n=1$ ta có: Vế trái = 1, Vế phải = $1^2=1$

Suy ra: Vế trái = Vế phải $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k$ với $k\in \mathbb{N}, k\ge 1$ tức là:

$$1+3+5+...+2k-1=k^2\quad (1)$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là:

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2\quad (2)$$

Thật vậy: Vế trái (2) $=(1+3+5+...+2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$ (Do đẳng thức (1))

$=(k+1)^2=VP(1.2)$

Vậy đẳng thức cho đúng với mọi $n\ge 1$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với $\forall n\ge 1$, ta có bất đẳng thức: $\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Giải

* Với $n=1$ ta có bất đẳng thức cho trở thành : $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2>\sqrt{3}$ đúng.

$\Rightarrow$ bất đẳng thức cho đúng với $n=1$.

* Giả sử bất đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là: $\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (1)

Ta phải chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là:

$$\frac{1.3.5...(2k-1)(2k+1)}{2.4.6....2k(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\ (2)$$

Thật vậy, ta có: $VT(2)=\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$

Ta chứng minh: $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\Leftrightarrow(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2\Leftrightarrow 3>1$ (luôn đúng)

Vậy bất đẳng thức cho đúng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với $\forall n\ge 1, \forall x>0$ ta có bất đẳng thức:

$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

- Với $n=1$ ta cần chứng minh: $\frac{x(x^2+1)}{x+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^3\Leftrightarrow 8x(x^2+1)\le(x+1)^4$

Tức là: $x^4-4x^3+6x^2-4x+1\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^4\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

- Giả sử $\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}$, ta chứng minh:

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}\quad (*)$$

Thật vậy, ta có: $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}\ge\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}$

Nên để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\ge\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$$

Hay $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2(x^{k+1}+1)^2\ge x(x^{k+2}+1)(x^k+1)$ (**)

Khai triển (**), biến đổi và rút gọn ta thu được:

$$x^{2k+2}(x-1)^2-2x^{k+1}(x-1)^2+(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^{k+1}-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Trong một số trường hợp để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n ta có thể chứng minh theo cách sau:

Bước 1: Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=1$ và $n=2^k$

Bước 2: Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k+1$, ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k$.

Cách chứng minh trên được gọi là quy nạp theo kiểu Cauchy (Cô si).

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$, ta luôn có:

1. $1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$.

Giải

1. * ***Bước 1:*** Với $n=1$ ta có:

Vế trái $=1^2=1$, Vế phải $=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1\Rightarrow$ Vế trái (VT) = Vế phải (VP).

$\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

* ***Bước 2***: Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad(1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)(2k+3)}{6}\quad(2).$$

Thật vậy: $VT\ (2)=\left[1^2+2^2+...+k^2\right]+(k+1)^2\overset{do\ (1)}{=}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$$=(k+1)\left[\frac{2k^2+k}{6}+k+1\right]=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=VP(2)$$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với mọi $n\ge 1$.

2. * Với $n=1$ ta có $VT=1=VP\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}\quad(1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}\quad(2).$$

Thật vậy:

$$VT(2)=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}=VP(2)$$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $1.2+2.3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ với $\forall n\ge 1$

2. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Giải

1. $1.2+2.3+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

2. $\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$

$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$.

Bài 3. 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ ta có:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad\text{(n dấu căn)}$$

2. Chứng minh các đẳng thức $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

với $x\ne k2\pi$ với $n\ge 1$.

Giải

1. * Với $n = 1 \Rightarrow$ Vế trái $= \sqrt{2}$, $VP = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Vế trái (VT) = Vế phải (VP) $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k$, tức là:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} \quad \text{(k dấu căn) (1)}$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \quad \text{(k + 1 dấu căn) (2).}$$

Thật vậy: $VT(2) = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{\text{k dấu căn}}} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$= \sqrt{2(1 + \cos\frac{\pi}{2^{k+1}})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} = VP(2)$$

(Ở trên ta đã sử dụng công thức $1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$).

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng.

2. • Với $n = 1$ ta có $VT = \sin x$, $VP = \frac{\sin\frac{x}{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}} = \sin x$ nên đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

• Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$$\sin x + \sin 2x + ... \sin kx = \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (1)$$

Ta chứng minh (4) đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$\sin x + \sin 2x + ... \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (2)$$

Thật vậy:

$$VT(2) = \frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x = \sin\frac{(k+1)x}{2}\left[\frac{\sin\frac{kx}{2} + 2\cos\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = VP(2).$$

Nên (2) đúng. Suy ra đẳng thức cho đúng với mọi $n \geq 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Giải

Ta chứng minh $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < \frac{n^2}{k^2} + \frac{n}{k} + 1$ $, 1 \leq k \leq n$ (1) bằng phương pháp quy nạp theo k. Sau đó cho $k = n$ ta có (7).

* Với $k = 1 \Rightarrow VT(1) = 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 = VP(1) \Rightarrow$ (1) đúng với $k = 1$.

* Giải sử (1) đúng với $k = p$, $1 \leq p \leq n$, tức là: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p < \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n} + 1$ (2).

Ta chứng minh (1) đúng với $k = p + 1$, tức là: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} < \frac{(p+1)^2}{n^2} + \frac{p+1}{n} + 1$ (3).

Thật vậy: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p . \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n} + 1\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{p^2}{n^3} + \frac{p^2 + p}{n^2} + \frac{p+1}{n} + 1 \leq \frac{p}{n^2} + \frac{p^2 + p}{n^2} + \frac{p+1}{n} + 1$$

$$< \frac{p^2 + 2p + 1}{n^2} + \frac{p+1}{n} + 1 = \frac{(p+1)^2}{n^2} + \frac{p+1}{n} + 1 \Rightarrow \text{(3) đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Cách khác: Khi $n = 1 \Rightarrow 2 < 3$ (đúng) dễ thấy khi $n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n}$ tiến dần về $0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tiến gần về 1. Vậy $\forall n \geq 1$ ta luôn có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Bài 5. Cho hàm số f xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện: $f(x+y) \ge f(x).f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (*). Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có : $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2n}$.

Giải

Trong bất đẳng thức $f(x+y) \ge f(x).f(y)$ thay x và y bằng $\frac{x}{2}$, ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \ge f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) \ge \left[f(\frac{x}{2})\right]^2$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = 1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \ge 1$. Ta có: $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2k}$ (1)

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là: $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1}$ (2)

Thật vậy ta có: $f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{x}{2^{k+1}}\right) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \ge \left[\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2\right]^{2^k} \Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$$

Do tính chất bắc cầu ta có được : $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1}$

Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ nên cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 6. Chứng minh các bất đẳng thức sau: $(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} \ge 1$ với $\forall n \ge 1$.

Giải

- Với $n = 1$ thì bđt hiển nhiên đúng
- Giả sử $k\cos\frac{\pi}{k} - (k-1)\cos\frac{\pi}{k-1} \ge 1$. Ta cần chứng minh:

$$(k+1)\cos\frac{\pi}{k+1} - k\cos\frac{\pi}{k} \ge 1 \Leftrightarrow k\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \cos\frac{\pi}{k}\right) \ge 2\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow k\sin\frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)}\sin\frac{\pi}{2k(k+1)} \ge \sin^2\frac{\pi}{2(k+1)} \quad (1)$$

Ta có: $\frac{\pi}{2} > \frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)} > \frac{\pi}{2(k+1)} > 0 \Rightarrow \sin\frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)} > \sin\frac{\pi}{2(k+1)}$

Mặt khác: $|\sin nx| \le n|\sin x| \Rightarrow k\sin\frac{\pi}{2k(k+1)} \ge \sin\frac{\pi}{2(k+1)}$

Từ đó ta có được (1) luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 7. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \ge 2$ là số nguyên. Chứng minh rằng nếu $\frac{f(x)+f(x)}{2} \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\forall x, y \ge 0$ (1) thì ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \quad \forall x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n} \quad (2).$$

Giải

- Ta chứng minh (2) đúng với $n = 2^k$, $k \ge 1$

* Với $k = 1$ thì (2) đúng (do (1))

* Giả sử (2) đúng với $n = 2^k$, ta chứng minh (2) đúng với $n = 2^{k+1}$

Thật vậy: $f(x_1)+...f(x_{2^k}) \ge 2^k f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}\right)$

$$f(x_{2^k+1})+...f(x_{2^{k+1}}) \ge 2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

Do đó: $f(x_1)+...f(x_{2^{k+1}}) \ge 2^k f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}\right) + 2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$

$$\ge 2^{k+1} f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}+x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right).$$

Do vậy (2) đúng với mọi $n = 2^k$.

- Giả sử (2) đúng với mọi $n = k+1 \ge 3$, tức là:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{k+1})}{k+1} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{k+1}}{k+1}\right) \quad (3)$$

Ta chứng minh (2) đúng với $n = k$, tức là:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right) \quad (4)$$

Thật vậy: đặt $x_{k+1} = \frac{x_1+x_2+...+x_k}{k} = \frac{x}{k}$, áp dụng (3) ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)+f\left(\frac{x}{k}\right)}{k+1} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+\frac{x}{k}}{k+1}\right)$$

Hay $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Chứng minh tương tự ta cũng có bài toán sau:

Nếu $\frac{f(x)+f(y)}{2} \ge f(\sqrt{xy})$ $\forall x, y \ge 0$ (a) thì ta có

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \ge f\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right)$ với $\forall x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$ (b).

Vấn đề 2. Ứng dụng phương pháp quy nạp trong số học và trong hình học

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n = 16^n - 15n - 1 \vdots 225$

Giải

- Với $n = 1$ ta có: $a_1 = 0 \Rightarrow a_1 \vdots 225$.
- Giả sử $a_k = 16^k - 15k - 1 \vdots 225$, ta chứng minh

$a_{k+1} = 16^{k+1} - 15(k+1) - 1 \vdots 225$

Thật vậy: $a_{k+1} = 16.16^k - 15k - 16 = 16^k - 15k - 1 - 15\left(16^k - 1\right) = a_k - 15\left(16^k - 1\right)$

Vì $16^k - 1 = 15.\left(16^{k-1} + 16^{k-2} + ... + 1\right) \vdots 15$ và $a_k \vdots 225$

Nên ta suy ra $a_{k+1} \vdots 225$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $A(n) = 7^n + 3n - 1$ luôn chia hết cho 9.

Giải

* Với $n = 1 \Rightarrow A(1) = 7^1 + 3.1 - 1 = 9 \Rightarrow A(1) \vdots 9$

* Giả sử $A(k) \vdots 9 \ \forall k \ge 1$, ta chứng minh $A(k+1) \vdots 9$

Thật vậy: $A(k+1) = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7.7^k + 21k - 7 - 18k + 9$

$\Rightarrow A(k+1) = 7A(k) - 9(2k-1)$

Vì $\begin{cases} A(k) \vdots 9 \\ 9(2k-1) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow A(k+1) \vdots 9$

Vậy $A(n)$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Ví dụ 3. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng:

$$B_n = (n+1)(n+2)(n+3)....(3n) \vdots 3^n.$$

Giải

- Với $n = 1$, ta có : $B_1 = 2.3 \vdots 3$
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là: $B_k = (k+1)(k+2)(k+3)...(3k) \vdots 3^k$

Ta chứng minh: $B_{k+1} = (k+2)(k+3)(k+4)...\left[3(k+1)\right] \vdots 3^{k+1}$

$B_{k+1} = 3(k+1)(k+2)(k+3)...(3k)(3k+1)(3k+2) = 3B_k(3k+1)(3k+2)$

Mà $B_k \vdots 3^k$ nên suy ra $B_{k+1} \vdots 3^{k+1}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Trong mặt mặt phẳng cho n điểm rời nhau (n > 2) tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.

Giải

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \ge 3$ điểm.

Ta chứng minh nó cũng đúng cho $n = k + 1$ điểm.

Ta có thể chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa có hai điểm. Ta kí hiệu đường thẳng đi qua hai điểm A_n và A_{n+1} là A_nA_{n+1}. Nếu những điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ nằm trên một đường thẳng thì số lượng các đường thẳng sẽ đúng là $n + 1$: Gồm n đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đường thẳng chúng nối chung. Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ không nằm trên một đường thẳng thì theo giả thiết quy nạp có n đường thẳng khác nhau. Bây giờ ta thêm các đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Vì đường thẳng A_nA_{n+1} không chứa một điểm nào trong $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, nên đường thẳng này khác hoàn toàn với n đường thẳng tạo ra bởi $A_1, A_2, ..., A_n$. Như vậy số đường thẳng tạo ra cũng không nhỏ hơn $n + 1$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng các góc trong một n – giác lồi $(n \ge 3)$ bằng $(n-2)180^0$.

Giải

- Với $n = 3$ ta có tổng ba góc trong tam giác bằng 180^0.

- Giả sử công thức đúng cho tất cả k-giác, với $k < n$, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng cho n-giác. Ta có thể chia n-giác bằng một đường chéo thành ra hai đa giác. Nếu số cạnh của một đa giác là k+1, thì số cạnh của đa giác kia là $n - k + 1$, hơn nữa cả hai số này đều nhỏ hơn n. Theo giả thiết quy nạp tổng các góc của hai đa giác này lần lượt là $(k-1)180^0$ và $(n-k-1)180^0$.

Tổng các góc của n-giác bằng tổng các góc của hai đa giác trên, nghĩa là $(k-1+n-k-1)180^0 = (n-2)180^0$.

Suy ra mệnh đề đúng với mọi $n \ge 3$.

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

1. $n^7 - n$ chia hết cho 7.

2. $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \ge 1$.

Giải

1. Đặt $a_n = n^7 - n$

Ta có $a_{n+1} = (n+1)^7 - (n+1) = a_{n+1} = a_n + \sum_{i=1}^{7} C_7^k n^{7-k}$

Mà $C_7^k = \dfrac{7!}{k!(7-k)!}, 1 \le k \le 7$ luôn chia hết cho 7.

2. Đặt $a_n = 16^n - 15n - 1$ thì ta có: $a_{k+1} = 16^{k+1} - 15k - 16 = a_k + 15.(16^k - 1)$.

Bài 2.

1. Chứng minh rằng với $\forall n \ge 2$, ta luôn có $a_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n.

2. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(1) = 1, f(2) = 2$ và $f(n+2) = 2f(n+1) + f(n)$. Chứng minh rằng: $f^2(n+1) - f(n+2)f(n) = (-1)^n$

3. Cho p_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng: $2^{2^n} > p_n$.

4. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên không vượt qua n! đều có thể biểu diễn thành tổng của không quá n ước số đôi một khác nhau của n!.

Giải

1. * Với $n = 2$, ta có : $a_2 = (2+1)(2+2) = 12 \Rightarrow a_2 \vdots 4 = 2^2$.

* Giả sử $a_k \vdots 2^k$ ta chứng minh $a_{k+1} \vdots 2^{k+1}$. Thật vậy:

$$a_{k+1} = (k+1+1)(k+1+2)...(k+k+1+1) = (k+2)(k+3)...(k+k+2)$$
$$= (k+2)(k+3)...(k+k)(k+k+1)(k+k+2)$$
$$= \underbrace{\left[(k+1)(k+2)(k+3)...(k+k)\right]}_{a_k}.2.(k+k+1) = 2a_k.(k^2+k+1)$$

Do $a_k \vdots 2^k \Rightarrow 2a_k \vdots 2^{k+1} \Rightarrow a_{k+1} \vdots 2^{k+1}$ đpcm.

2. • Ta có: $f(3) = 2f(2) + f(1) = 5$, nên $f^2(2) - f(3)f(1) = 2^2 - 5.1 = (-1)^1$

Suy ra đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

• Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k$, tức là:

$$f^2(k+1) - f(k+2)f(k) = (-1)^k \quad (1)$$

Ta chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k+1$, tức là:

$$f^2(k+2) - f(k+3)f(k+1) = (-1)^{k+1} \quad (2)$$

Ta có: $f^2(k+2) - f(k+3)f(k+1) = f^2(k+2) - \left[2f(n+2) + f(n+1)\right]f(k+1)$

$= f(k+2)\left[f(k+2) - 2f(k+1)\right] - f^2(k+1) = f(k+2)f(k) - f^2(k+1) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$

Vậy bài toán được chứng minh.

3. Trước hết ta có nhận xét: $p_1.p_2...p_n + 1 > p_{n+1}$

• Với $n = 1$ ta có: $2^{2^1} = 4 > p_1 = 2$

• Giả sử $2^{2^k} > p_k\ \forall k \le n$, ta cần chứng minh $2^{2^{k+1}} > p_{k+1}$

Thật vậy, ta có: $2^{2^1}.2^{2^2}...2^{2^{p_k}} + 1 > p_1.p_2...p_k + 1 > p_{k+1}$

Suy ra $2^{2^1+2^2+...+2^k} > p_{k+1} \Rightarrow 2^{2^{k+1}-1} + 1 > p_{k+1} \Rightarrow 2^{2^{k+1}} > p_{k+1}$

Vậy bài toán được chứng minh.

4. • Với $n = 1$ bài toán hiển nhiên đúng.

• Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$

Nếu $a = (k+1)!$ thì bài toán hiển nhiên đúng.

Ta xét $a < (k+1)!$, ta có: $a = (k+1)d + r$ với $d < k!, r < k+1$

Vì $d < k!$ nên $d = d_1 + d_2 + ... + d_k$ với $d_i\ (i = \overline{1,k})$ là các ước đôi một khác nhau của k!

Khi đó: $a = (k+1)d_1 + (k+1)d_2 + ... + (k+1)d_k + r$

Vì $(k+1)d_i$, r là các ước đôi một khác nhau của $(k+1)!$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$. Đặt $a_n = x_1^n + x_2^n$. Chứng minh rằng :

1. $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}\ \forall n \ge 2$.
2. a_n là một số nguyên và a_n không chia hết cho 5 với mọi $n \ge 1$.

Giải

1. Ta có: $a_n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_1^{n-2})$

Theo định lí Viét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$ nên ta có:

$a_n = 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_1^{n-2}) = 6a_{n-1} - a_{n-2}$.

2. * Với $n = 1 \Rightarrow a_1 = x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$ và a_1 không chia hết cho 5.

* Giả sử $a_k \in \mathbb{Z}$ và a_k không chia hết cho 5 với mọi $k \ge 1$.

Ta chứng minh $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$ và a_{k+1} không chia hết cho 5.

Do $a_{k+1} = 6a_k - a_{k-1}$, mà $a_k, a_{k-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác: $a_{k+1} = 5a_k + (a_k - a_{k-1}) = 5a_k + 5a_{k-1} - a_{k-2}$

Vì a_{k-2} không chia hết cho 5 và $\begin{cases} 5a_k \vdots 5 \\ 5a_{k-1} \vdots 5 \end{cases}$ nên suy ra a_{k+1} không chia hết cho 5.

Bài 4. **1.** Trong không gian cho n mặt phẳng phân biệt ($n \ge 1$), trong đó ba mặt phẳng luôn cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào có điểm chung. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền?

2. Cho n đường thẳng nằm trong mặt phẳng trong đó hai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ miền.

Giải

1. Giả sử n mặt phẳng chia không gian thành a_n miền

Ta chứng minh được: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$

Từ đó ta tính được: $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}$.

2. Gọi a_n là số miền do n đường thẳng trên tạo thành. Ta có: $a_1 = 2$.

Ta xét đường thẳng thứ $n + 1$ (ta gọi là d), khi đó d cắt n đường thẳng đã cho tại n điểm và bị n đường thẳng chia thành $n + 1$ phần đồng thời mỗi phần thuộc một miền của a_n.

Mặt khác với mỗi đoạn nằm trong miền của a_n sẽ chia miền đó thành 2 miền, nên số miền có thêm là $n + 1$. Do vậy, ta có: $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

Từ đây ta có: $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.

Bài 5. Chứng minh rằng từ $n + 1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Giải

- Với $n = 1$ ta thấy bài toán hiển nhiên đúng.
- Giả sử bài toán đúng với $n - 1$, có nghĩa là: từ n số bất kì trong $2n - 2$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh bài toán đúng với n, tức là: từ $n + 1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử tồn tại một tập con X có $n + 1$ phần tử của tập $A = \{1, 2, ..., 2n\}$ sao cho hai số bất kì trong X không là bội của nhau.

Ta sẽ chứng minh rằng có một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ sao cho hai phần tử bất kì của X' không là bội của nhau.

Để chứng minh điều này ta xét các trường hợp sau đây:

* **Trường hợp 1:** X không chứa $2n$ và $2n - 1$

Ta bỏ đi một phần tử bất kì của tập X ta được một tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

* **Trường hợp 2:** X chứa $2n$ mà không chứa $2n - 1$

Ta bỏ đi phần tử $2n$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

* **Trường hợp 3:** X chứa $2n - 1$ mà không chứa $2n$

Ta bỏ đi phần tử $2n - 1$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

* **Trường hợp 4:** X chứa $2n$ và $2n - 1$

Vì X không chứa hai số là bội của nhau nên X không chứa n và ước của n (Vì nếu chứa ước của n thì số đó là ước của $2n$)

Bây giờ trong X, ta bỏ đi hai phần tử $2n - 1$ và $2n$ rồi bổ sung thêm n vào thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

Như vậy ta luôn thu được một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1, 2, ..., 2n - 2\}$ mà các phần tử không là bội của nhau. Điều này trái với giả thiết quy nạp. Vậy bài toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

CHƯƠNG 2: DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Dãy số là tập hợp các giá trị của hàm số $u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R},\ n\to u(n)$ Được sắp xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp theo đối số tự nhiên n: $u(1),u(2),u(3),...,u(n),...$

- Ta kí hiệu $u(n)$ bởi u_n và gọi là *số hạng thứ n* hay *số hạng tổng quát* của dãy số, u_1 được gọi là số hạng đầu của dãy số.
- Ta có thể viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1,u_2,...,u_n,...$ hoặc dạng rút gọn (u_n).

2. Người ta thường cho dãy số theo các cách:

- Cho số hạng tổng quát, tức là: cho hàm số u xác định dãy số đó
- Cho bằng công thức truy hồi, tức là:
  * Cho một vài số hạng đầu của dãy
  * Cho hệ thức biểu thị số hạng tổng quát qua số hạng (hoặc một vài số hạng) đứng trước nó.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) gọi là dãy tăng nếu $u_n<u_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) gọi là dãy giảm nếu $u_n>u_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn trên nếu có một số thực M sao cho $u_n<M\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn dưới nếu có một số thực m sao cho $u_n>m\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.
- Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy bị chặn, tức là tồn tại số thực dương M sao cho $|u_n|<M\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định số hạng của dãy số

I. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1,3,19,53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

Giải

Xét dãy (u_n) có dạng: $u_n=an^3+bn^2+cn+d$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b+c+d=-1\\8a+4b+2c+d=3\\27a+9b+3c+d=19\\64a+16b+4c+d=53\end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=1,b=0,c=-3,d=1\Rightarrow u_n=n^3-3n+1$ là một quy luật.

Số hạng thứ 10: $u_{10}=971$.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n=\dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;
2. Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Giải

1. Ta có năm số hạng đầu của dãy:

$$u_1=\frac{1^2+3.1+7}{1+1}=\frac{11}{2},\ u_2=\frac{17}{3},u_3=\frac{25}{4},u_4=7,u_5=\frac{47}{6}$$

2. Ta có: $u_n=n+2+\dfrac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{5}{n+1}$ nguyên hay $n+1$ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n+1=5\Leftrightarrow n=4$

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4=7$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\u_n=2u_{n-1}+3\ \forall n\ge 2\end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;
2. Chứng minh rằng $u_n=2^{n+1}-3$;
3. Số hạng thứ 2012^{2012} của dãy số có chia hết cho 7 không?

Giải

1. Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1=1;\ u_2=2u_1+3=5;\ u_3=2u_2+3=13;\ u_4=2u_3+3=29$

$u_5=2u_4+3=61$.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* Với $n=1\Rightarrow u_1=2^{1+1}-3=1\Rightarrow$ bài toán đúng với $N=1$

* Giả sử $u_k=2^{k+1}-3$, ta chứng minh $u_{k+1}=2^{k+2}-3$

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1}=2u_k+3=2(2^{k+1}-3)+3=2^{k+2}-3$ đpcm.

3. Ta xét phép chia của n cho 3

* $n = 3k \Rightarrow u_n = 2(2^{3k} - 1) - 1$

Do $2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = 7.A \vdots 7 \Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

* $n = 3k + 1 \Rightarrow u_n = 4(2^{3k} - 1) + 1 \Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

* $n = 3k + 2 \Rightarrow u_n = 8(2^{3k} - 1) + 5 \Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

Vậy số hạng thứ 2012^{2012} của dãy số không chia hết cho 7.

Ví dụ 4. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định như sau $u_1 = 3, v_1 = 2$ và

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n.v_n \end{cases} \text{với } n \geq 2.$$

1. Chứng minh : $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ và $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ với $\forall n \geq 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

Giải

1. Ta chứng minh bài toán theo quy nạp

a) Chứng minh: $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ (1)

- Ta có $u_1^2 - 2v_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$ nên (1) đúng với $n = 1$
- Giả sử $u_k^2 - 2v_k^2 = 1$, khi đó ta có:

$$u_{k+1}^2 - 2v_{k+1}^2 = \left(u_k^2 + 2v_k^2\right)^2 - 2\left(2u_k v_k\right) = \left(u_k^2 - 2v_k^2\right)^2 = 1$$

Từ đó suy ra (1) đúng với $\forall n \geq 1$.

b) Chứng minh $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ (2)

Ta có: $u_n - \sqrt{2}v_n = u_{n-1}^2 + 2v_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1} = \left(u_{n-1} - \sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

- Ta có: $u_1 - \sqrt{2}v_1 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$ nên (2) đúng với $n = 1$
- Giả sử $u_k - \sqrt{2}v_k = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^k}$, ta có:

$$u_{k+1} - \sqrt{2}v_{k+1} = \left(u_k - \sqrt{2}v_k\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng với $\forall n \geq 1$.

2. Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n + \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases} 2u_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n} \end{cases}$

Hay $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$.

II. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n + 1}{n + 2}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy số.
2. Tìm số hạng thứ 100 và 200
3. Số $\dfrac{167}{84}$ có thuộc dãy số đã cho hay không?
4. Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Giải

1. Năm số hạng đầu của dãy là: $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{5}{4}, u_3 = \dfrac{7}{5}, u_4 = \dfrac{3}{2}, u_5 = \dfrac{11}{7}$.

2. Số hạng thứ 100: $u_{100} = \dfrac{2.100 + 1}{100 + 2} = \dfrac{67}{34}$

Số hạng thứ 200: $u_{200} = \dfrac{2.200 + 1}{200 + 2} = \dfrac{401}{202}$.

3. Giả sử $u_n = \dfrac{167}{84} \Rightarrow \dfrac{2n + 1}{n + 2} = \dfrac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n + 1) = 167(n + 2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

4. Ta có: $u_n = \dfrac{2(n + 2) - 3}{n + 2} = 2 - \dfrac{3}{n + 2} \Rightarrow u_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{3}{n + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \vdots n + 2 \Leftrightarrow n = 1$

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng là số nguyên.

Bài 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1. Viết 7 số hạng đầu tiên của dãy
2. Chứng minh rằng: $u_n = 5.3^{n-1} - 6.2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Giải

1. Bốn số hạng đầu của dãy:

$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87$; $u_5 = 5u_4 - 6u_3 = 309$

$u_6 = 5u_5 - 6u_4 = 1023$; $u_7 = 5u_6 - 6u_5 = 3261$.

2. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

* $u_1 = 5.3^0 - 6.2^0 = -1$ (đúng).

* Giả sử $u_k = 5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}, \forall k \ge 2$.

Khi đó, theo công thức truy hồi ta có:

$$u_{k+1} = 5.u_k - 6u_{k-1} = 5\left(5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}\right) - 6\left(5.3^{k-2} - 6.2^{k-2}\right)$$

$$= 5\left(5.3^{k-1} - 6.3^{k-2}\right) - 6\left(5.2^{k-1} - 6.2^{k-2}\right) = 5.3^k - 6.2^k \text{ (đpcm).}$$

* *__Chú ý__*: Ta có bài toán tổng quát sau:

Cho dãy $(u_n): \begin{cases} u_1, u_2 \\ a.u_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0\ \forall n \ge 2 \end{cases}$, với $b^2 - 4ac > 0$

Khi đó: $u_n = \alpha.x_1^{n-1} + \beta.x_2^{n-1}$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) và $\alpha, \beta : \begin{cases} \alpha.x_1 + \beta.x_2 = u_1 \\ \alpha.x_1^2 + \beta.x_2^2 = u_2 \end{cases}$.

Phương trình (*) gọi là phương trình đặc trưng của dãy.

Bài 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3,\ n \ge 2 \end{cases}$.

1. Tìm 6 số hạng đầu của dãy;
2. Chứng minh rằng $u_n = 5.2^{n-1} - 3$ với $\forall n \ge 2$;
3. Số hạng có 3 chữ số lớn nhất của dãy là bao nhiêu?

Giải

1. Ta có 6 số hạng đầu của dãy là:

$u_2 = 2u_1 + 3 = 7, u_3 = 17, u_4 = 37, u_5 = 77, u_6 = 157$

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

Với $n = 2$ ta có: $u_2 = 5.2 - 3 = 7$ (đúng)

Giả sử $u_k = 5.2^{k-1} - 3$, khi đó ta có:

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2\left(5.2^{k-1} - 3\right) + 3 = 5.2^k - 3$$

Vậy bài toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

3. Ta có $u_n < 1000 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \dfrac{1003}{5}$.

Mà 2^9 là lũy thừa lớn nhất của 2 lớn nhất có 3 chữ số nên ta có:

$2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n = 10$.

Vậy u_{10} là số hạng cần tìm.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) có 4 số hạng đầu là : $u_1 = 1, u_2 = 3,\ u_3 = 6, u_4 = 10$.

1. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên;
2. Tìm ba số hạng tiếp theo của dãy số theo quy luật vừa tìm trên.

Giải

1. Vì dãy số cho giá trị của 4 số hạng đầu ứng với 4 giá trị tương ứng của $n = 1,2,3,4$ nên ta chỉ cần xác định một hàm số theo n mà ta phải tìm 4 ẩn là được. Chẳng hạn ta xét $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Theo bài ra ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 27a + 9b + 3c + d = 6 \\ 64a + 16b + 4c + d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 7a + 3b + c = 2 \\ 26a + 8b + 2c = 5 \\ 21a + 5b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = c = \dfrac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}.$$

Nên $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ là một dãy thỏa mãn đề bài.

2. Ta có ba số hạng tiếp theo của dãy là: $u_5 = 15, u_6 = 21, u_7 = 28$.

Bài 5. 1. Cho dãy $(u_n): u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right]$ .Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

2. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}u_n\right], n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có vô hạn các số chẵn và vô hạn các số lẻ.

3. Chứng minh rằng tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn: $u_0 = 1, u_1 = 2$ và $\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$.

Giải

1. Đặt $a = 2 + \sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = -1 \end{cases}$.

Khi đó: $u_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n) = \frac{1}{2}\left[(a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})\right]$

$$= 4.\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} + \frac{a^{n-2} + b^{n-2}}{2} = 4u_{n-1} + u_{n-2}$$

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp:

* $u_1 = 2$ là số chẵn và $u_2 = 9$ là số lẻ

* Giả sử u_{2k} là số lẻ và u_{2k-1} là số chẵn.

Khi đó: $u_{2k+1} = 4u_{2k} + u_{2k-1}$ là số chẵn, $u_{2k+2} = 4u_{2k+1} + u_{2k}$ là số lẻ

Từ đó ta có đpcm.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng

- Giả sử dãy (u_n) có hữu hạn các số chẵn, giả sử u_k là số hạng lớn nhất của dãy là số chẵn. Khi đó u_n lẻ với $\forall n \geq k+1$.

Đặt $u_{k+1} = 2^m.p + 1$ với $m, p \in \mathbb{N}, p$ lẻ. Khi đó:

$$u_{k+1} = \left[3p.2^{m-1} + \frac{3}{2}\right] = 3p.2^{m-1} + 1$$

$u_{k+2} = 3p.2^{m-2} + 1, \ldots, u_{k+m} = 3p.2^0 + 1 = 3p + 1$ là số lẻ, suy ra vô lí.

Nên dãy (u_n) chứa vô hạn số chẵn.

- Chứng minh tương tự ta cũng có dãy (u_n) chứa vô hạn số lẻ.

3. Ta có: $|u_2 - 4| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_2 = 5 \Rightarrow u_3 = 12, u_3 = 13 \\ u_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 4, u_3 = 5 \end{array}\right.$

a) Ta chứng minh tồn tại duy nhất dãy số nguyên dương (u_n) thỏa mãn

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 5$ và $\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1, \forall n \geq 4$ (1)

- Chứng minh tồn tại:

Xét dãy (v_n): $\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + v_{n-1}, n = 2, 3, \ldots \end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được (v_n) thỏa mãn (1).

Thật vậy: $\left|v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2\right| = \left|v_n(v_{n+1} + v_n) - v_{n+1}^2\right|$.

$$= \left|v_{n+1}(v_n - v_{n+1}) + v_n^2\right| = \left|v_n^2 - v_{n-1}v_{n+1}\right| = 1.$$

- Chứng minh duy nhất.

Trước hết ta chứng minh nếu dãy (u_n) thỏa mãn (1) thì (u_n) là dãy tăng.

Giả sử $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - 1 \geq a_n$

Từ $\left|a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2\right| = 1 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_n} \geq \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_{n+1} - 1} > a_{n+1} + 1 > a_{n+1}$

Nên theo quy nạp ta có đpcm.

Giả sử tồn tại k để $v_k \neq u_k$ và $v_n = u_n, \forall n < k$. Khi đó

Ta giả sử $v_k < u_k$, suy ra: $\begin{cases} u_k.u_{k-2} = u_{k-1}^2 + 1 \\ v_k.v_{k-2} = v_{k-1}^2 - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow u_{k-2}(u_k - v_k) = 2 \Rightarrow 2 \vdots u_{k-2}$ điều này vô lí.

Do vậy tồn tại duy nhất dãy nguyên dương (u_n) (đó chính là dãy (v_n)) thỏa mãn (1).

b) Tương tự ta chứng minh được tồn tại dũy nhất các dãy nguyên dương thỏa mãn:

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 4, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 5, u_3 = 12, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 5, u_3 = 13, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1.$

Đó là các dãy tương ứng là: $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n$

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n$

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n$.

Vậy tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6. (Dãy Fibonacci)

Cho dãy số (F_n) được xác định bởi $F_1 = 1, F_2 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Chứng minh rằng:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

2. $F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$.

Giải

1. Trước hết ta thấy dãy (F_n) tồn tại và duy nhất.

Xét $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

Với $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, b=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases}$

Ta có: $x_1=x_2=1$ và:

$$x_{n-1}+x_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n-1}-b^{n-1}+a^{n-2}-b^{n-2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}(a+1)-b^{n-2}(b+1)\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}.\frac{3+\sqrt{5}}{2}-b^{n-2}.\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-b^{n-2}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)=x_n$$

Vậy ta có: $F_n=x_n, \ \forall n\ge 1$.

2. • Trước hết ta chứng minh:

$F_{5n}=5F_nq_n$ với q_n không chia hết cho 5 (1)

Ta có: $\sqrt{5}F_{5n}=a^{5n}-b^{5n}$

Đặt $x=a^n, y=b^n$, như vậy ta có $xy=(ab)^n=(-1)^n$

Do đó: $\sqrt{5}F_{5n}=(x-y)\left[x^4+xy\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2+y^4\right]$ (2)

Mặt khác: $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=5F_n^2+2(-1)^n$

$$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=\left[5F_n^2+2(-1)^n\right]^2-2$$

$$=25F_n^4+20(-1)^nF_n^2+2 \quad (3).$$

Từ đó, ta có: $F_{5n}=\sqrt{5}F_n\left[25F_n^4+20(-1)^nF_n^2+2+5(-1)^nF_n^2+2+1\right]$

Hay $F_{5n}=5F_n\left[5F_n^4+5F_n^2(-1)^2+1\right]=5F_nq_n$,

trong đó: $q_n=5F_n^4+5F_n^2(-1)^n+1$. Rõ ràng ta thấy q_n không chia hết cho 5.

• Với số tự nhiên n, ta phân tích $n=5^st$ với $(t,5)=1$.

Khi đó từ (1) ta có $F_n=5^sF_tA_n$ trong đó A_n không là bội của 5.

Nếu t không là bội của 5 thì F_t không là bội của 5, do đó:

$F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow s\ge k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$ (đpcm).

Vấn đề 2. Dãy số đơn điệu - Dãy số bị chặn

I. PHƯƠNG PHÁP

- Để xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) ta xét: $k_n=u_{n+1}-u_n$

  * Nếu $k_n>0\ \forall n\in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng

  * Nếu $k_n<0\ \forall n\in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) giảm.

Khi $u_n>0\ \forall n\in \mathbb{N}^*$ ta có thể xét $t_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$

  * Nếu $t_n>1 \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng

  * Nếu $t_n<1 \Rightarrow$ dãy (u_n) giảm.

- Để xét tính bị chặn của dãy số ta có thể dự đoán rồi chứng minh bằng quy nạp.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1=2 \\ u_n=\frac{u_{n-1}+1}{2}\ \forall n\ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Giải

Ta có: $u_n-u_{n-1}=\frac{1-u_{n-1}}{2}$

Do đó, để chứng minh dãy (uₙ) giảm ta chứng minh $u_n>1\ \forall n\ge 1$

Thật vậy: Với $n=1\Rightarrow u_1=2>1$. Giả sử $u_k>1 \Rightarrow u_{k+1}=\frac{u_k+1}{2}>\frac{1+1}{2}=1$

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_n>1\ \forall n\ge 1$

Suy ra $u_n-u_{n-1}<0 \Leftrightarrow u_n<u_{n-1}\ \ \forall n\ge 2$ hay dãy (u_n) giảm

Theo chứng minh trên, ta có: $1<u_n<u_1=2\ \forall n\ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Ví dụ 2. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \ \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn

Giải

Ta chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng bằng phương pháp quy nạp

* Dễ thấy: $u_1 < u_2 < u_3$.

* Giả sử $u_{k-1} < u_k \ \forall k \ge 2$, ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$. Thật vậy:

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} > \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} = u_k$$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

Cũng bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n < 4 \ \forall n$, hơn nữa $u_n > 0$

Nên dãy (u_n) là dãy bị chặn.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$ 2. $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

3. $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n}$ 4. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2}$

Giải

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5n^2 + 10n + 2}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên dãy (u_n) là dãy tăng.

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0$

Nên dãy (u_n) giảm.

3. Ta có: $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng.

4. Ta có: $u_1 = 0; u_2 = \dfrac{1}{2}; u_3 = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 < u_2 \end{cases} \Rightarrow$ Dãy số không tăng không giảm.

Bài 2. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

1. $u_n = \dfrac{2n - 13}{3n - 2}$ 2. $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$ 3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + n + n^2}}$

Giải

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n - 11}{3n + 1} - \dfrac{2n - 13}{3n - 2} = \dfrac{34}{(3n+1)(3n-2)} > 0$ với mọi $n \ge 1$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n \ \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow -11 \le u_n < \dfrac{2}{3} \ \forall n \ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{n+2} - \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1} = \dfrac{n^2 + 5n + 5}{n+2} - \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n+1}$

$$= \frac{(n^2 + 5n + 5)(n+1) - (n^2 + 3n + 1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 3}{(n+1)(n+2)} > 0 \ \forall n \ge 1$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

$u_n > \dfrac{n^2 + 2n + 1}{n+1} = n + 1 \ge 2 \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới.

3. Ta có: $u_n > 0 \ \forall n \ge 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1) + 1}} = \sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 3}} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \ \forall \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác: $0 < u_n < 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Bài 3.

1. Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{an + 2}{2n - 1}$, $n \ge 1$

 a) Khi $a = 4$, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

 b) Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

2. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2, \ n = 2, 3.. \end{cases}$

 a) Viết 6 số hạng đầu của dãy

 b) Chứng minh $u_n = 3^{n-1} + 1, \ n = 1, 2, ...$

Giải

1. a) Với $a = 4$ ta có: $u_n = \dfrac{4n + 2}{2n - 1}$. Ta có: 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1 = 6, u_2 = \dfrac{10}{3}, u_3 = \dfrac{14}{5}, u_4 = \dfrac{18}{7}, u_5 = \dfrac{22}{9}$.

b) Ta có dãy số (u_n) tăng khi và chỉ khi:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-a-4}{(2n+1)(2n-1)}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow -a-4>0\Leftrightarrow a<-4.$$

2. a) Ta có: $u_1=2, u_2=4, u_3=10, u_4=28, u_5=82, u_6=244$

b) Chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp hoặc chứng minh bằng cách sau:

Ta có: $u_n-1=3(u_{n-1}-1)=3^2(u_{n-2}-1)=...=3^{n-1}(u_1-1)$

Suy ra: $u_n-1=3^{n-1}\Rightarrow u_n=3^{n-1}+1$.

Bài 4.

1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=2011\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{u_n+1},\ \forall n=1,2,...\end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm

b) Tìm phần nguyên của u_n với $0\le n\le 1006$.

2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=2, u_2=6\\ u_{n+2}=u_n+2u_{n+1},\ \forall n=1,2,...\end{cases}$

a) Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x-1=0$. Chứng minh rằng: $u_n=a^n+b^n$

b) Chứng minh rằng: $u_{n+1}^2-u_{n+2}u_n=(-1)^{n-1}.8$.

Giải

1. a) Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n}{u_n+1}<0,\ \forall n$ nên dãy (u_n) là dãy giảm.

b) Ta có: $u_n=u_{n-1}-\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-1}+1}>u_{n-1}-1>...>u_0-n$

Suy ra: $u_{n-1}>u_0-(n-1)=2012-n$

Mặt khác: $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+...+(u_1-u_0)+u_0$

$$=u_0-\left(\frac{u_0}{u_0+1}+\frac{u_1}{u_1+1}+...+\frac{u_{n-1}}{u_{n-1}+1}\right)$$

$$=u_0-n+\left(\frac{1}{u_0+1}+\frac{1}{u_1+1}+...+\frac{1}{u_{n-1}+1}\right)$$

Mà: $0<\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+...+\dfrac{1}{u_{n-1}+1}<\dfrac{n}{u_{n-1}+1}<\dfrac{n}{2013-n}<1$ với mọi $n=\overline{2,1006}$.

Suy ra $u_n<u_0-n+1=2012-n$

Do đó: $2011-n<u_n<2012-n\Rightarrow[u_n]=2011-n$ với $n=\overline{2,1006}$.

Vì $u_0=2011$ và $u_1=\dfrac{2011^2}{2012}=2010{,}000497$ nên $[u_0]=2011-0,\ [u_1]=2010=2011-1$

Vậy $[u_n]=2011-n,\ \forall n=\overline{0,1006}$.

2. a) Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Với $n=1\Rightarrow u_1=a+b=2$

Giả sử $u_n=a^n+b^n,\ \forall n\le k$

Khi đó: $u_{k+1}=2u_k+u_{k-1}=2(a^k+b^k)+a^{k-1}+b^{k-1}$

$$=(a+b)(a^k+b^k)+a^{k-1}+b^{k-1}$$

$$=a^{k+1}+b^{k+1}+ab(a^{k-1}+b^{k-1})+a^{k-1}+b^{k-1}$$

$$=a^{k+1}+b^{k+1}-(a^{k-1}+b^{k-1})+a^{k-1}+b^{k-1}=a^{k+1}+b^{k+1}.$$

b) Ta có: $u_{n+1}^2-u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2-(2u_{n+1}+u_n).u_n$

$$=u_{n+1}(u_{n+1}-2u_n)-u_n^2=-(u_n^2-u_{n+1}u_{n-1})$$

$$=...=(-1)^{n-1}(u_2^2-u_3u_1)=(-1)^n.8.$$

Bài 5. Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau:

1. $(u_n): u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$

2. $\begin{cases}u_1=2, u_2=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}},\ \forall n\ge 2\end{cases}$.

Giải

1. Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{(n+2)^2-(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}>0,\ \forall n$.

Mặt khác: $u_n=1-\dfrac{1}{n+2}\Rightarrow 0<u_n<1,\ \forall n$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

2. Trước hết ta chứng minh $1<u_n<4,\ \forall n$

Điều này hiển nhiên đúng với $n=1$.

Giả sử $1<u_n<4$, ta có: $1<u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$

Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng

Ta có: $u_1 < u_2$, giả sử $u_{n-1} < u_n$, $\forall n \le k$.

Khi đó: $\begin{cases} u_k < u_{k-1} \\ u_{k-1} < u_{k-2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} < \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} \Rightarrow u_{k+1} < u_k$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Bài 6.

1. Cho dãy số (x_n): $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i,\ n = 2,3,... \end{cases}$

Xét dãy số $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) là một tăng và bị chặn.

2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 + 1},\ n = 0,1,.. \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số nguyên.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right]$

Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

4. Cho hai dãy số $(x_n);(y_n)$ xác định: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} \\ y_n = \dfrac{y_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + y_{n-1}^2}} \end{cases}$ $\forall n \ge 2$.

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3$, $\forall n \ge 2$.

Giải

1. Ta có: $x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)$

$$= \frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n + \frac{(n-1)^2}{2n}x_n\right) = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n.$$

Do đó: $y_n = x_{n+1} - x_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n$.

- Ta chứng minh dãy (y_n) tăng.

Ta có: $y_{n+1} - y_n = \dfrac{(n+1)^2 + n + 2}{(n+1)^3}.\dfrac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n - \dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n$

$$= \frac{(n^2+3n+3)(n^2+1) - (n^2+n+1)(n^2+2n+1)}{n^3(n+1)^2}x_n = \frac{2x_n}{n^3(n+1)^2} > 0,\ \forall n = 1,2,..$$

- Ta chứng minh dãy (y_n) bị chặn.

Trước hết ta chứng minh: $x_n \le 4(n-1)$ (1) với $\forall n = 2,3...$

* Với $n = 2$, ta có: $x_2 = 4x_1 = 4$ nên (1) đúng với $n = 2$

* Giả sử (1) đúng với n, tức là: $x_n \le 4(n-1)$, ta có

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n \le \frac{4(n^4-1)}{n^3} < 4n$$

Nên (1) đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra (1) đúng

Ta có: $y_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3}x_n \le \dfrac{4(n-1)(n^2+n+1)}{n^3} = \dfrac{4(n^3-1)}{n^3} < 4$

Vậy bài toán được chứng minh.

2. Ta có $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}$

$(u_{n+1} - 5u_n)^2 = 24u_n^2 + 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 10u_{n+1}u_n + u_n^2 - 1 = 0$ (1)

Ở (1) thay $n+1$ bởi n ta được: $u_n^2 - 10u_n.u_{n-1} + u_{n-1}^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^2 - 10u_{n-1}.u_n + u_n^2 - 1 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra u_{n+1}, u_{n-1} là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 10tu_n + u_n^2 - 1 = 0$$

Theo định lí Viet ta có: $u_{n+1} + u_{n-1} = 10u_n$ hay $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$

Từ đó ta có: $u_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n$.

3. Đặt $a = 2+\sqrt{5}, b = 2-\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = -1 \end{cases}$. Khi đó:

$$u_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n) = \frac{1}{2}\left[(a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})\right]$$

$$= 4.\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} + \frac{a^{n-2} + b^{n-2}}{2} = 4u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

- Với $n = 1$ ta có: $u_1 = 2$ là số chẵn và $u_2 = 9$ là số lẻ
- Giả sử u_{2k} là số lẻ và u_{2k-1} là số chẵn.

Khi đó: $u_{2k+1} = 4u_{2k} + u_{2k-1}$ là số chẵn; $u_{2k+2} = 4u_{2k+1} + u_{2k}$ là số lẻ

Từ đó ta có đpcm.

4. Ta có: $x_1 = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x_2 = \cot\frac{\pi}{6} + \sqrt{1+\cot^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \cot\frac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $x_n = \cot\frac{\pi}{2^{n-1}.6}$.

Tương tự, ta cũng có: $y_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3}$

Đặt $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n.3} \Rightarrow x_n = \cot\alpha_n;\ y_n = \tan 2\alpha_n \Rightarrow x_n.y_n = \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n$

Đặt $t = \tan\alpha_n \Rightarrow \tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n = \frac{2t}{1-t^2}.\frac{1}{t} = \frac{2}{1-t^2}$.

Vì $n \ge 2 \Rightarrow 0 < \alpha_n < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < t < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{3} \le 1-t^2 < 1$

$\Rightarrow 2 < \frac{2}{1-t^2} < 3 \Rightarrow 2 < x_n y_n < 3,\ \forall n \ge 2 \Rightarrow$ đpcm.

CHƯƠNG 3: CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. CẤP SỐ CỘNG

1. **Định nghĩa:** Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; d gọi là công sai.

2. **Các tính chất:**

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + u_{k+2})$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. **Định nghĩa:** Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.q \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; q gọi là công bội.

2. **Các tính chất:**

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1}^2 = u_k.u_{k+2}$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xác định cấp số và xác yếu tố của cấp số

I. PHƯƠNG PHÁP

- Dãy số (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = d$ không phụ thuộc vào n và d là công sai.
- Dãy số (u_n) là một cấp số nhân $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n và q là công bội.
- Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
- Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2$.
- Để xác định một cấp số cộng, ta cần xác định số hạng đầu và công sai. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và d.
- Để xác định một cấp số nhân, ta cần xác định số hạng đầu và công bội. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và q.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

Giải

Giả sử bốn số hạng đó là $a-3x; a-x; a+x; a+3x$ với công sai là $d = 2x$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} (a-3x)+(a-x)+(a+x)+(a+3x) = 20 \\ (a-3x)^2+(a-x)^2+(a+x)^2+(a+3x)^2 = 120 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 20 \\ 4a^2 + 20x^2 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là 2, 4, 6, 8.

Chú ý:

* Cách gọi các số hạng của cấp số cộng như trên giúp ta giải quyết bài toán gọn hơn.

* Nếu số hạng cấp số cộng là lẻ thì gọi công sai $d = x$, là chẵn thì gọi công sai $d = 2x$ rồi viết các số hạng cấp số dưới dạng đối xứng.

* Nếu cấp số cộng (a_n) thỏa mãn: $\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = p \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = s^2 \end{cases}$ thì:

$$a_1 = \frac{1}{n}\left[p - \frac{n(n-1)}{2}.d\right] \text{ và } d = \pm\sqrt{\frac{12\left(ns^2 - p^2\right)}{n^2\left(n^2 - 1\right)}}.$$

Ví dụ 2. Cho CSC (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

1. Xác định công sai và công thức tổng quát của cấp số;
2. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + ... + u_{2011}$.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng, ta có:

$$\begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

1. Ta có công sai $d = 3$ và số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d = 3n - 2$.
2. Ta có các số hạng $u_1, u_4, u_7, ..., u_{2011}$ lập thành một cấp số cộng gồm 670 số hạng với công sai $d' = 3d$, nên ta có: $S = \frac{670}{2}(2u_1 + 669d') = 673015$.

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$.

1. Tính số hạng thứ 100 của cấp số;
2. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số;
3. Tính $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30}$.

Giải

Từ giả thiết bài toán, ta có: $\begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}.$$

1. Số hạng thứ 100 của cấp số: $u_{100} = u_1 + 99d = -295$
2. Tổng của 15 số hạng đầu: $S_{15} = \frac{15}{2}\left[2u_1 + 14d\right] = -285$
3. Ta có: $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30} = \frac{27}{2}\left[2u_4 + 26d\right] = 27\left(u_1 + 16d\right) = -1242$.

Chú ý: Ta có thể tính S theo cách sau:

$$S = S_{30} - S_3 = 15\left(2u_1 + 29d\right) - \frac{3}{2}\left(2u_1 + 2d\right) = -1242.$$

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (uₙ) thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

1. Xác định cấp số cộng;
2. Tính tổng $S = u_5 + u_7 + ... + u_{2011}$.

Giải

1. Ta có: $\begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow u_1 = 1, d = 3\,;\, u_5 = u_1 + 4d = 1 + 12 = 13$

2. Ta có $u_5, u_7, ..., u_{2011}$ lập thành CSC với công sai $d = 6$ và có 1003 số hạng nên $S = \frac{1003}{2}\left(2u_5 + 1002.6\right) = 3028057$.

Ví dụ 5. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính $S = \frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + ... + \frac{1}{u_{49}u_{50}}$.

Giải

Gọi d là công sai của cấp số đã cho

Ta có: $S_{100} = 50\left(2u_1 + 99d\right) = 24850 \Rightarrow d = \frac{497 - 2u_1}{99} = 5$

$$\Rightarrow 5S = \frac{5}{u_1u_2} + \frac{5}{u_2u_3} + ... + \frac{5}{u_{49}u_{50}} = \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2u_3} + ... + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49}u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_{48}} - \frac{1}{u_{49}} + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 49d} = \frac{245}{246} \Rightarrow S = \frac{49}{246}.$$

Ví dụ 6. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng khác không, tìm u_1 biết:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$$

Giải

Ta có: $\begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 15 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\dfrac{q^4-1}{q-1} = 15 \\ u_1^2\dfrac{q^8-1}{q^2-1} = 85 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{q^4-1}{q-1}\right)^2\left(\frac{q^2-1}{q^8-1}\right) = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(q^4-1)(q+1)}{(q-1)(q^4+1)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được $u_1 = 1, u_1 = 8$.

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \dfrac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của cấp số;
2. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số;
3. Số $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

Giải

Gọi q là công bội của cấp số. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1q^3 = \dfrac{2}{27} \\ u_1q^2 = 243.u_1q^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 = \dfrac{2}{27} \\ q^5 = \dfrac{1}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

1. Năm số hạng đầu của cấp số là: $u_1 = 2, u_2 = \dfrac{2}{3}, u_3 = \dfrac{2}{9}; u_4 = \dfrac{2}{27}, u_5 = \dfrac{2}{81}$.
2. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số:

$$S_{10} = u_1\frac{q^{10}-1}{q-1} = 2.\frac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}-1}{\dfrac{1}{3}-1} = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right] = \frac{59048}{19683}.$$

3. Ta có: $u_n = \dfrac{2}{3^{n-1}} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{6561} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9$

Vậy $\dfrac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Dãy số (u_n) có phải là cấp số cộng không? Nếu phải hãy xác định số công sai? Biết:

1. $u_n = 2n+3$ 2. $u_n = \dfrac{2}{n}$

Giải

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)+3-(2n+3) = 2$ là hằng số

Suy ra dãy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n} = \dfrac{-2}{n(n+1)}$ phụ thuộc vào n

Vậy dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

Bài 2. Dãy số (u_n) có phải là cấp số nhân không? Nếu phải hãy xác định số công bội? Biết:

1. $u_n = 2n$ 2. $u_n = 4.3^n$ 3. $u_n = \dfrac{2}{n}$.

Giải

1. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n}$ phụ thuộc vào n suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số nhân.

2. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4.3^{n+1}}{4.3^n} = 3$ không phụ thuộc vào n suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 3$.

3. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{n+1} : \dfrac{2}{n} = \dfrac{n}{n+1}$ phụ thuộc vào n.

Suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số nhân.

Bài 3. Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số cộng hay không? Nếu phải hãy xác định công sai.

1. $u_n = 4-5n$ 2. $u_n = \dfrac{2n+3}{5}$ 3. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Giải

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = -5$

Dãy (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = -5$.

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{5}$. Dãy (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = \dfrac{2}{5}$.

3. Ta có: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n(n+1)} \Rightarrow (u_n)$ không là cấp số cộng.

Bài 4. Tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và C = 5A. Xác định số đo các góc A, B, C.

Giải

Từ giả thiết bài toán ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}A+B+C=180^0\\A+C=2B\\C=5A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=5A\\B=3A\\9A=180^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=20^0\\B=60^0\\C=100^0\end{cases}.$$

Bài 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^{\frac{n}{2}+1}$

1. Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân
2. Tính tổng $S=u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{20}$
3. Số 19683 là số hạng thứ mấy của dãy số.

Giải

1. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{\frac{n+1}{2}+1}}{3^{\frac{n}{2}+1}}=\sqrt{3},\forall n\in N^*\Rightarrow$ Dãy số là cấp số nhân với $u_1=3\sqrt{3};q=\sqrt{3}$.

2. Ta có $u_2;u_4;u_6;\ldots;u_{20}$ lập thành cấp số nhân số hạng đầu $u_2=9;q=3$ và có 10 số hạng nên: $S=u_2.\frac{1-3^{10}}{1-3}=9.\frac{3^{10}-1}{2}=\frac{9}{2}(3^{10}-1)$.

3. Ta có: $u_n=19683\Leftrightarrow 3^{\frac{n}{2}+1}=3^9\Leftrightarrow \frac{n}{2}+1=9\Leftrightarrow n=16$

Vậy số 19683 là số hạng thứ 16 của cấp số.

Bài 6.

1. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ 7 gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng còn lại của CSN đó.
2. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng –9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29.

Giải

1. Gọi CSN đó là (u_n), $n=\overline{1,7}$. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}u_4=6\\u_7=243u_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q^3=6\\u_1.q^6=243u_1.q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{2}{9}\\q=3\end{cases}$$

Do đó các số hạng còn lại của cấp số nhân là:

$$u_1=\frac{2}{9};u_2=\frac{2}{3};u_3=2;u_5=18;u_6=54;u_7=162$$

2. Gọi ba số hạng của CSC là $a-2x;a;a+2x$ với $d=2x$

Ta có: $\begin{cases}a-2x+a+a+2x=-9\\(a-2x)^2+a^2+(a+2x)^2=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$.

Bài 7.

1. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2.u_7=75\end{cases}$. Tìm u_1,d?
2. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d>0$; $\begin{cases}u_{31}+u_{34}=11\\u_{31}^2+u_{34}^2=101\end{cases}$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.
3. Gọi $S_1;S_2;S_3$ là tổng $n_1;n_2;n_3$ số hạng đầu của một cấp số cộng. Chứng minh rằng: $\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0$.

Giải

1. Ta có: $\begin{cases}u_1+6d-u_1-2d=8\\(u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\u_1=3,u_1=-17\end{cases}$

2. Ta có: $\begin{cases}2u_1+63d=11\\(u_1+30d)^2+(u_1+33d)^2=101\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-89\\d=3\end{cases}$

Vậy $u_n=3(n-1)-89=3n-92$.

3. Thay công thức $S_1=\frac{n_1}{2}(2u_1+(n_1-1)d)$

$S_2=\frac{n_2}{2}(2u_2+(n_2-1)d)$; $S_3=\frac{n_3}{2}(2u_3+(n_3-1)d)$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 8. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=11\\u_1+u_5=\frac{82}{11}\end{cases}$

1. Tìm công bội và số hạng tổng quát của cấp số.
2. Tính tổng S_{2011}.
3. Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$ có bao nhiêu số hạng của cấp số.

Giải

1. Gọi q là công bội của cấp số. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\dfrac{39}{11} \\ u_1+u_5=\dfrac{82}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(q+q^2+q^3\right)=\dfrac{39}{11} \\ u_1\left(1+q^4\right)=\dfrac{82}{11} \end{cases}$$

Suy ra: $\dfrac{q^4+1}{q^3+q^2+q}=\dfrac{82}{39} \Leftrightarrow 39q^4-82q^3-82q^2-82q+39=0$

$\Leftrightarrow (3q-1)(q-3)(13q^2+16q+13)=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{1}{3}, q=3$

- $q=\dfrac{1}{3} \Rightarrow u_1=\dfrac{81}{11} \Rightarrow u_n=\dfrac{81}{11}.\dfrac{1}{3^{n-1}}$
- $q=3 \Rightarrow u_1=\dfrac{1}{11} \Rightarrow u_n=\dfrac{3^{n-1}}{11}$.

2. Ta có: $S_{2011}=u_1\dfrac{q^{2011}-1}{q-1}$

- $q=\dfrac{1}{3} \Rightarrow S_{2011}=\dfrac{243}{22}\left(1-\dfrac{1}{3^{2011}}\right)$
- $q=3 \Rightarrow S_{2011}=\dfrac{1}{22}\left(3^{2011}-1\right)$

3. Với $q=3$ ta có: $u_n=\dfrac{3^{n-1}}{11} \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow n=3$ nên có một số hạng của dãy

Với $q=\dfrac{1}{3}$ ta có: $u_n=\dfrac{1}{11.3^{n-5}} \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow n=3$ nên có một số hạng của dãy.

Bài 9. Cho dãy số $(x_n): x_n=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,3...$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cấp số cộng gồm 2011 số hạng mà mỗi số hạng đều thuộc dãy số trên.

Giải

Xét dãy số $(u_n): u_k=\dfrac{k}{2011!}$, $k=\overline{1,2011}$.

Ta có: $u_{k+1}=\dfrac{k+1}{2011!}=\dfrac{k}{2011!}+\dfrac{1}{2011!}=u_k+\dfrac{1}{2011!}$

Nên dãy (u_n) là cấp số cộng có 2011 số hạng.

Hơn nữa $u_k=\dfrac{1}{1.2...(k-1)(k+1)...2011}=x_{1.2...(k-1)(k+1)...2011}$

Từ đó ta có đpcm.

Vấn đề 2. Chứng minh tính chất của cấp số

I. PHƯƠNG PHÁP

- Sử dụng công thức tổng quát của cấp số, chuyển các đại lượng qua số hạng đầu và công sai, công bội.
- Sử dụng tính chất của cấp số:

i) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a+c=2b$

ii) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac=b^2$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các số:

1. $1,\sqrt{3},3$ không thể cùng thuộc một cấp số cộng;
2. $2,3,5$ không thể cùng thuộc một cấp số nhân.

Giải

1. Giả sử $1,\sqrt{3},3$ là số hạng thứ m,n,p của một CSC (u_n). Ta có:

$\sqrt{3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{u_p-u_n}{u_n-u_m}=\dfrac{u_1(p-n)}{u_1(n-m)}=\dfrac{p-n}{n-m}$ vô lí vì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ, còn $\dfrac{p-n}{n-m}$ là số hữu tỉ.

2. Giả sử $2,3,5$ là ba số hạng thứ m,n,p của CSN (v_n) có công bội q

Ta có: $\dfrac{2}{3}=\dfrac{u_m}{u_n}=q^{m-n};\dfrac{5}{3}=q^{p-n}$, suy ra $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p-n}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{m-n}=p^{(p-n)(m-n)}$

$\Rightarrow 2^{p-n}.3^{m-p}.5^{n-m}=1$ vô lí.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là:

1. Cấp số cộng khi và chỉ khi $u_n=an+b$
2. Cấp số nhân khi và chỉ khi $u_n=a.q^n$.

Giải

1. Giả sử (u_n) là một cấp số cộng công sai d, khi đó:

$u_n=u_1+(n-1)d=dn+u_1-d=an+b$.

Giả sử: $u_n=an+b \Rightarrow u_{n+1}-u_n=a \Rightarrow u_{n+1}=u_n+a, \forall n$

Suy ra (u_n) là một cấp số cộng với công sai a.

2. Giả sử (u_n) là cấp số nhân với công bội q, khi đó: $u_n = u_1.q^n$

Giả sử $u_n = a.q^n$, suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \Rightarrow u_{n+1} = q.u_n,\ \forall n$

Suy ra dãy (u_n) là cấp số nhân với công bội q.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng:

1. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng thì $9ab = 2a^3 + 27c$.
2. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì $c(ca^3 - b^3) = 0$.

Giải

1. Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng

Suy ra: $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

Mặt khác: $x^3 - ax^2 + bx - c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

Suy ra $x_1 + x_2 + x_3 = a$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $3x_2 = a$ hay $x_2 = \frac{a}{3}$

Dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \frac{a}{3}$, tức là:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{a}{3}\right) - c = 0 \Leftrightarrow -\frac{2a^3}{27} + \frac{ba}{3} - c = 0 \Leftrightarrow 9ab = 2a^3 + 27c$$

Ta có đpcm.

2. Giả sử ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành CSN, suy ra $x_1x_3 = x_2^2$

Theo phân tích bài trên, ta có: $x_1x_2x_3 = c \Rightarrow x_2^3 = c \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{c}$

Hay phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \sqrt[3]{c}$, tức là:

$$\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 - a\left(\sqrt[3]{c}\right)^2 + b\sqrt[3]{c} - c = 0 \Leftrightarrow b\sqrt[3]{c} = a\sqrt[3]{c^2} \Leftrightarrow c(ca^3 - b^3) = 0$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập $X = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ thành hai tập con rời nhau luôn có một tập chứa ba số lập thành cấp số cộng.

Giải

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng

Giả sử X được chia thành hai tập con A và B đồng thời trong A và B không có ba số nào lập thành cấp số cộng.

Xét ba cấp số cộng (1; 3; 5), (3; 4; 5), (3; 5; 7)

Ta thấy số 3, 5 không thể cùng nằm trong một tập hợp, vì nếu hai số này thuộc A thì 1, 4, 7 phải thuộc B, tuy nhiên các số 1, 4, 7 lại lập thành cấp số cộng.

Tương tự bằng cách xét CSC (3; 5; 7), (5; 6; 7), (5; 7; 9) thì ta có hai số 5, 7 không thể cũng nằm trong một tập.

Vì cặp (3; 5) và (5; 7) không cùng thuộc một tập nên ta suy ra (3; 7) thuộc A, 5 thuộc B. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- $4 \in A$, vì $3, 4 \in A \Rightarrow 2 \notin A \Rightarrow 2 \in B$, do 1, 4, 7 lập thành cấp số cộng nên $1 \in B$; 2, 5, 8 lập thành cấp số cộng nên $8 \in A \Rightarrow 9 \in B$

Do đó $1, 5, 9 \in B$ lập thành cấp số cộng vô lí

- $4 \in B$, do $4, 5 \in B \Rightarrow 6 \in A$ mà $6, 7 \in A \Rightarrow 8 \in B$

$5, 8 \in B \Rightarrow 2 \in A$, vì $2, 3 \in A \Rightarrow 1 \in B$, vì $1, 5 \in B \Rightarrow 9 \in A$

Do đó: $3, 6, 9 \in B$ vô lí. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5. Dãy số (xn) thỏa mãn điều kiện: $\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| < \frac{1}{m+n}\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng: (xn) là một cấp số cộng.

Giải

Đặt $a_n = x_n - nx_1$, khi đó ta có $a_1 = 0$ và $|a_{m+n} - a_m - a_n| < \frac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Ở đây ta sẽ chứng minh $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, ta có:

$\left|a_{n+1} - a_n\right| < \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, nên $\lim |a_{n+1} - a_n| = 0$ hay $\lim |a_{n+k} - a_n| = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Mà $\left|a_{n+k} - a_n - a_k\right| < \frac{1}{n+k}$ nên $\lim\limits_n |a_{n+k} - a_n - a_k| = 0$.

Từ đây suy ra $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1.

1. Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng: $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.
2. Cho $a, b, c > 0$ lập thành cấp sô cộng.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

3. Cho (uₙ) là cấp số cộng. Chứng minh rằng: $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-k} + u_{n+k}),\ 1 \le k \le n - 1$.

Giải

1. Vì a, b, c lập thành cấp số cộng nên $a+c=2b$.

Do đó : $a^2+2bc-c^2-2ab=(a-c)(a+c)-2b(a-c)$

$$=(a-c)(a+c-2b)=0$$

Suy ra $a^2+2bc=c^2+2ab$.

2. Gọi d là công sai của cấp số, suy ra $b-a=c-b=d, c-a=2d$

Do đó: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}+\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d}=\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{d}$

$$=\frac{c-a}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

3. Gọi d là công sai của cấp số. Ta có: $\begin{cases}u_{n-k}=u_1+(n-k-1)d\\u_{n+k}=u_1+(n+k-1)d\end{cases}$

$$\Rightarrow u_{n-k}+u_{n+k}=2u_1+(2n-2)d=2u_n\Rightarrow u_n=\frac{u_{n-k}+u_{n+k}}{2}.$$

Bài 2.

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \cos A;\cos B;\cos C$ lập thành cấp số cộng.

2. Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng $\cot\frac{A}{2};\cot\frac{B}{2};\cot\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \sin A;\sin B;\sin C$ lập thành cấp số cộng.

Giải

1. Ta có: $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin(\frac{A}{2}+\frac{C}{2})}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos A+\cos C\right]$$

$\Leftrightarrow \cos B=\dfrac{\cos A+\cos C}{2}\Leftrightarrow \cos A,\cos B,\cos C$ lập thành cấp số cộng.

2. Ta có: $\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}=\sin\frac{C-B}{2}.\cos\frac{C+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin B-\sin A=\sin C-\sin B\Leftrightarrow\sin A+\sin C=2\sin B.$$

Bài 3. Cho a, b, c lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng:

1. $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$.
2. $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$.
3. $(a^n+b^n+c^n)(a^n-b^n+c^n)=a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$; $n\in\mathbb{N}^*$.

Giải

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên ta có $b^2=ac$.

1. Ta có: $(a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$

$$=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$$

2. Ta có: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+ac)(ac+c^2)=ac(a+c)^2$

$$=b^2(a+c)^2=(ab+bc)^2.$$

3. Ta có: $VT=(a^n+c^n)^2-b^{2n}=a^{2n}+c^{2n}+b^{2n}+2(a^nc^n-b^{2n})\ =a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$.

Bài 4. Cho (uₙ) là cấp số nhân. Chứng minh rằng:

1. $a_1a_n=a_k.a_{n-k+1},\ k=\overline{1;n}$ 2. $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

Giải

Gọi q là công bội của cấp số

1. Ta có: $a_1a_n=a_1.a_1q^{n-1}=a_1^2q^{n-1}$; $a_k.a_{n-k+1}=a_1.q^{k-1}.a_1.q^{n-k}=a_1^2.q^{n-1}$

Suy ra : $a_1a_n=a_k.a_{n-k+1}$.

2. Ta có: $S_n(S_{3n}-S_{2n})=u_1\dfrac{q^n-1}{q-1}.u_1\left(\dfrac{q^{3n}-1}{q-1}-\dfrac{q^{2n}-1}{q-1}\right)=u_1^2\dfrac{q^{2n}(q^n-1)^2}{(q-1)^2}$

$$(S_{2n}-S_n)^2=\left(u_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}-u_1\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2=u_1^2\frac{q^{2n}(q^n-1)^2}{(q-1)^2}$$

Suy ra $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

Bài 5.

1. Điều cần và đủ để ba số khác không a,b,c là ba số hạng của một cấp số nhân là tồn tại ba số nguyên khác không p,t,r sao cho $\begin{cases} p+t+r=0 \\ a^p.b^t.c^r=1 \end{cases}$.

2. Cho bốn số thực $a_1;a_2;a_3;a_4$. Biết rằng: $\begin{cases} \dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{a_1a_3} \\ \dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{3}{a_1a_4} \end{cases}$

   Chứng minh rằng: $a_1;a_2;a_3;a_4$ lập thành cấp số cộng.

3. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba số a,b,c là ba số hạng của một cấp số cộng là tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r thỏa mãn: $\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$.

4. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của tam giác lập thành cấp số nhân thì công bội của cấp số nhân đó nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Giải

1. • Giải sử a,b,c là ba số hạng thứ $k+1;l+1;m+1$ của cấp số nhân có công bội q, khi đó ta có :

$$a=u_1.q^k;b=u_1.q^l;c=u_1.q^m \Rightarrow \frac{a}{b}=q^{k-l};\frac{b}{c}=q^{l-m} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{l-m}=\left(\frac{b}{c}\right)^{k-l}$$

$$\Rightarrow a^{l-m}.b^{m-l-k+1}.c^{k-1}=1$$

Đặt $p=l-m;t=m-l-k+1;r=k-1$.

Khi đó ta có ba số p,t,r thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Giả sử ta có $\begin{cases} p+t+r=0 \\ a^p.b^t.c^r=1 \end{cases} \Rightarrow a^p.c^r=b^{p+r} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\left(\dfrac{b}{c}\right)^r$ (*)

Do $p+t+r=0$ nên tồn tại ít nhất một số dương và một số âm.

Giải sử $r>0,t<0$. Đặt $\dfrac{b}{a}=q^r \Rightarrow b=a.q^r$ kết hợp với (*) ta có :

$$\left(\frac{a}{a.q^r}\right)^p=\left(\frac{a.q^r}{c}\right)^r \Rightarrow c=a.q^{r+p}.$$

Vậy ba số a,b,c là ba số hạng của cấp số nhân với a là số hạng đầu, b là số hạng thứ $r+1$; c là số hạng thứ $r+p+1$.

2. Ta có $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{a_1a_3} \Leftrightarrow a_3+a_1=2a_2 \Rightarrow a_1-a_2=a_2-a_3=d$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4} \Leftrightarrow \frac{2}{a_1a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4}$$

$$\Leftrightarrow 2a_4+a_1=3a_3 \Leftrightarrow 2a_4=3(a_1+2d)-a_1 \Rightarrow a_4=a_1+3d.$$

3. • Giả sử a,b,c là ba số hạng thứ $m+1,n+1,k+1$ của một cấp số cộng (u_n)

Ta có: $\begin{cases} a=u_1+md \\ b=u_1+nd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=\dfrac{a-b}{m-n} \\ u_1=a-\dfrac{m(a-b)}{m-n}=\dfrac{mb-an}{m-n} \end{cases}$

Mặt khác: $c=u_1+kd \Rightarrow (m-n)c=mb-na+k(a-b)$

$$\Rightarrow (k-n)a+(m-k)b+(n-m)c=0$$

Đặt $p=k-n,q=m-k,r=n-m \Rightarrow \begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$

• Giả sử tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r sao cho: $\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$ và $p,q,r>0$

Ta có: $p=-q-r$ nên $(-q-r)a+qb+rc=0 \Leftrightarrow (a-b)p=(c-a)r$

Đặt $d=\dfrac{a-b}{r} \Rightarrow a=b+rd, c=a+pd=b+(p+r)d$

Vậy b,a,c là ba số hạng u_1,u_r,u_{p+r} của một cấp số cộng.

4. Giả sử a,b,c là ba cạnh tam giác theo thứ tự đó lập thành CSN với công bội q.

Ta có: $\begin{cases} a+aq>aq^2 \\ aq^2+aq>a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2-q-1<0 \\ q^2+q-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q\in\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ q\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow q\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Bài 6. Cho hai số tự nhiên n,k thỏa mãn: $k+3 \le n$.

1. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai giá trị của k sao cho C_n^k, C_n^{k+1} và C_n^{k+2} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2. Chứng minh rằng không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Giải

1. Ta có: $C_n^k + C_n^{k+2} = 2C_n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} = 2\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k+2) + (n-k)(n-k-1) = 2(k+2)(n-k)$$

Đây là phương trình bậc hai ẩn k nên có nhiều nhất hai nghiệm.

2. Giả sử tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Do $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên suy ra: $C_n^{n-k}, C_n^{n-k-1}, C_n^{n-k-2}, C_n^{n-k-3}$ cũng tạo thành bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Vậy ta có các bộ sau là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng:

$$C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}$$

$$C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}$$

$$C_n^{n-k-3}, C_n^{n-k-2}, C_n^{n-k-1}$$

$$C_n^{n-k-2}, C_n^{n-k-1}, C_n^{n-k}$$

Ta chứng minh tập $\{k, k+1, n-k-3, n-k-2\}$ chứa không quá hai số khác nhau. Thật vậy, giả sử $k, k+1, n-k-3$ là ba số khác nhau.

Khi đó, tồn tại ba cấp số cộng: $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}$

$$C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}$$

$$C_n^{n-k-3}, C_n^{n-k-2}, C_n^{n-k-1}$$

Điều này trái với kết quả câu 1.

Do $k, k+1$ và $k-k-3, n-k-2$ là các số tự nhiên liên tiếp nên ta có:

$\begin{cases} k = n-k-3 \\ k+1 = n-k-2 \end{cases} \Rightarrow C_n^{k+1} = C_n^{n-k-2} = C_n^{k+2}$. Suy ra $C_n^k = C_n^{k+1} = C_n^{k+2}$ (1).

Xét phương trình : $C_n^k = C_n^{k+1}$ (2) $\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$\Leftrightarrow k+1 = n-k \Rightarrow k = \frac{n-1}{2}$$

Suy ra phương trình (2) có không quá một nghiệm k, điều này dẫn tới (1) mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Bài 7. **1.** Cho (u_n) là CSC. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{C_n^k} = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$

2. Cho k là một số nguyên dương cho trước. Giả sử $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là một dãy tăng nghặt các số nguyên dương sao cho các dãy con $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ và $s_{s_1+k}, s_{s_2+k}, s_{s_3+k}, \ldots$ đều là cấp số cộng. Chứng minh rằng $s_1, s_2, s_3, \ldots$ cũng là một cấp số cộng.

Giải

1. Ta có $\begin{cases} u_1 + u_{n+1} = u_{k+1} + u_{n-k+1} \\ C_n^k = C_n^{n-k} \end{cases}, \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Nên $2\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{C_n^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{u_{k+1}}{C_n^k} + \frac{u_{n-k+1}}{C_n^{n-k}} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1} + u_{n-k+1}}{C_n^k} = (u_1 + u_{n+1}) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$

Do đó, để chứng minh đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} \quad (1).$$

Ta chứng minh (1) bằng quy nạp

- Với $n = 1$ ta có: $VT(1) = \frac{1}{C_1^0} + \frac{1}{C_1^1} = 2$ và $VP(1) = \frac{2}{4}(2+2) = 2$

Nên (1) đúng với $n = 1$.

- Giả sử $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$, ta chứng minh $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{2^k}{k}$ (2)

Thật vậy: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = \frac{1}{C_{n+1}^0} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}$

Mà $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k+1}{C_n^k} + \frac{n-k+1}{C_n^{n-k}} \right)$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+2}{2(n+1)} \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = 1 + \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{2^k}{k}$ dẫn tới (2) được chứng minh.

2. Gọi p và q lần lượt là công sai của các cấp số cộng $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ và $s_{s_1+k}, s_{s_2+k}, s_{s_3+k}, \ldots$. Đặt $a = s_{s_1} - p$ và $b = s_{s_1+k} - q$.

Theo công thức tính số hạng tổng quát của một cấp số cộng và với số nguyên dương n ta có: $s_{s_n} = s_{s_1} + (n-1)p = a + np$, $s_{s_n+k} = s_{s_1+k} + (n-1)q = b + nq$.

Từ dãy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là một dãy tăng ngặt, nên với mọi số nguyên dương n và với chú ý $s_n + k \le s_{n+k}$ ta có $s_{s_n} + k - 1 < s_{s_n+k} \le s_{s_{n+k}}$,

từ đó ta thu được: $a + np + k - 1 < b + nq \le a + (n+1)p$,

điều này tương đương với $0 < k - 1 + b - a + n(q - p) \le kp$,

nếu $p \ne q$ thì ta thấy bất đẳng thức trên mâu thuẫn khi cho n cằng lớn.

Nên suy ra $p = q$ và do đó $0 \le k - 1 + b - a \le kp$ (1)

Đặt $m = \min\{s_{n+1} - s_n : n = 1, 2, \ldots\}$.

Khi đó $b - a = (s_{s_1+k} - q) - (s_{s_1} - p) = s_{s_1+k} - s_{s_1} \ge km$ (2)

Và $kp = a + (s_1 + k)p - (a + s_1 p) = s_{s_{s_1+k}} - s_{s_{s_1}} = s_{b+p} - s_{a+q} \ge m(b-a)$ (3)

Ta xét hai trường hợp:

- $b - a = kp$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n, $s_{s_n+k} = b + np = a + (n+k)p = s_{s_{n+k}}$, từ đây kết hợp với dãy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là một dãy tăng ngặt ta có $s_{n+k} = s_n + k$.

Mặt khác do $s_n < s_{n+1} < \ldots < s_{n+k} = s_n + k$ nên $s_{n+1} = s_n + 1$ và do đó $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là một cấp số cộng với công sai bằng 1.

- $b - a < kp$. Chọn số nguyên dương N sao cho $s_{N+1} - s_N = m$. Khi đó:

$$m(a - b + p - k) = m((a + (N+1)p) - (b + Np + k))$$

$$\le s_{a+(N+1)p} - s_{b+Np+k} = s_{s_{s_{N+1}}} - s_{s_{s_N+k}+k}$$

$$= (a + s_{N+1}p) - (b + (s_N + k)p) = (s_{N+1} - s_N)p + a - b - kp = mp + a - b - kp,$$

do vậy: $(b - a - km) + (kp - m(b-a)) \le 0.$ (4)

Từ các bất đẳng thức (2), (3) và (4) ta thu được các đẳng thức sau:

$$b - a = km \text{ và } kp = m(b-a).$$

Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $s_{n+1} > s_n + m$. Khi đó:

$$m(m+1) \le m(s_{n+1} - s_n) \le s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = (a + (n+1)p) - (a + np)$$

$$= p = \frac{m(b-a)}{k} = m^2 \text{, vô lý.}$$

Vì vậy điều giả sử là sai nên $s_{n+1} = s_n + m$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ hay dãy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là một cấp số cộng có công sai bằng m.

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số

I. PHƯƠNG PHÁP

- a, b, c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a + c = 2b$
- a, b, c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac = b^2$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm x biết:

1. $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng;
2. $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

Giải

1. Ta có: $x^2 + 1, x - 2, 1 - 3x$ lập thành cấp số cộng :

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 1 - 3x = 2(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 3$

Vậy $x = 2, x = 3$ là những giá trị cần tìm.

2. Ta có: $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Cho các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành cấp số cộng; các số $(y+1)^2, xy + 1, (x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.Tính x, y.

Giải

Ta có các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành cấp số cộng nên suy ra

$$2(2x + 3y) = 5x - y + x + 2y \text{ hay } 2x = 5y \quad (1)$$

Các số $(y+1)^2, xy + 1, (x-1)^2$ lập thành cấp số nhân suy ra :

$$(xy+1)^2 = (y+1)^2(x-1)^2 \Leftrightarrow (4 + 2y - 2x)(4xy + 2x - 2y) = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(4+2y-5y)\left(10y^2+5y-2y\right)=0$

$$\Leftrightarrow y(4-3y)(10y+3)=0 \Leftrightarrow y=0, y=\frac{4}{3}, y=-\frac{3}{10}.$$

Vậy $(x;y)=(0;0);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right)$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm x, y biết:

1. Các số $x+5y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y-1)^2, xy-1, (x+1)^2$ lập thành cấp số nhân.

2. Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $x+\frac{5}{3}y, y-1, 2x-3y$ lập thành cấp số nhân.

Giải

1. Ta có hệ: $\begin{cases} x+5y+8x+y=2(5x+2y) \\ (x+1)^2(y-1)^2=(xy-1)^2 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được:

$$(x;y)=\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Ta có hệ: $\begin{cases} x+6y+8x+y=2(5x+2y) \\ (x+\frac{5}{3}y)(2x-3y)=(y-1)^2 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được:

$$(x;y)=(-3;-1);\left(\frac{3}{8};\frac{1}{8}\right).$$

Bài 2. Xác định m để:

1. Phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. Phương trình $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

Giải

1. Đặt $t=x^2, t\ge 0$.

Phương trình trở thành: $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_2>t_1>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-(2m+1)>0 \\ 2m+1>0 \\ 2(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m\ne 0$$

Khi đó phương trình (2) có bốn nghiệm là: $-\sqrt{t_2};-\sqrt{t_1};\sqrt{t_1};\sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}=-2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1$$

Theo định lý Viet thì : $\begin{cases} t_1+t_2=2(m+1) \\ t_1t_2=2m+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1+9t_1=2(m+1) \\ t_1 9t_1=2m+1 \end{cases} \Rightarrow 9m^2-32m-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\frac{4}{9} \end{array}\right..$$

Vậy $m=4$ hoặc $m=-\frac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

2. **Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:**

$$\begin{cases} x_1x_3=x_2^2 \\ x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m+1 \end{cases} \Rightarrow x_2=-\frac{m+1}{2}$$

thay vào phương trình ta có: $m=-1, m=3, m=-4$.

Bằng cách thay từng giá trị của m vào phương trình ta thấy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHỦ ĐỀ 4: GIỚI HẠN

CHƯƠNG 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn bằng 0 khi n tiến ra dương vô cực nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá tri tuyệt dối nhỏ hơn số dương đó. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$. Hay là: $\lim\limits_{x\to 0} u_n = 0$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho: $|u_n| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (u_n - a) = 0$, tức là: Với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $|u_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$.

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

2. Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $k \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$

Chú ý: Ta viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN

* **Định lí 1.** Nếu dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n| < v_n$ kể từ số hạng nào đó trở đi và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

* **Định lí 2.** Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$. Ta có:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}\ (b \neq 0)$
- Nếu $u_n \geq 0\ \forall n$ thì $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q thỏa $|q| < 1$. Khi đó tổng

$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ gọi là tổng vô hạn của cấp số nhân và

$$S = \lim S_n = \lim \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}.$$

VI. GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow$ với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

2. Một số kết quả đặc biệt

- $\lim n^k = +\infty$ với mọi $k > 0$
- $\lim q^n = +\infty$ với mọi $q > 1$

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực.

* **Quy tắc 1:** Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n . v_n)$ được cho như sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

* **Quy tắc 2:** Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = l$ thì $\lim(u_n . v_n)$ được cho như sau:

$\lim u_n$	Dấu của l	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$

* **Quy tắc 3:** Nếu $\lim u_n = l, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ được coi như sau:

Dấu của l	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

I. PHƯƠNG PHÁP

- Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mọi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_a sao cho $|u_n| < a \ \forall n > n_a$.
- Để chứng minh $\lim u_n = l$ ta chứng minh $\lim(u_n - l) = 0$.
- Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh với mọi số $M > 0$ lớn tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_M sao cho $u_n > M \ \forall n > n_M$.
- Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$.
- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{n+2}{n+1} = 1$ 2. $\lim \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$ 3. $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$.

Giải

1. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$, ta có: $\left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a$ với $\forall n > n_a$

Suy ra $\lim\left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{n+2}{n+1} = 1$.

2. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{3}{a} - 1}$, ta có:

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{n^2+1} < \frac{3}{n_a^2+1} < a \text{ với } \forall n > n_a$$

Suy ra $\lim\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

3. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{9}{a^2} - 1}$, ta có:

$$\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = \left|\frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right| < \left|\frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{3}{\sqrt{n_a^2+1}} < a$$

với $\forall n > n_a$.

Suy ra $\lim\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số $(u_n) : u_n = (-1)^n$ không có giới hạn.

Giải

Ta có: $u_{2n} = 1 \Rightarrow \lim u_{2n} = 1$; $u_{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim u_{2n+1} = -1$

Vì giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất nên ta suy ra dãy (uₙ) không có giới hạn.

Ví dụ 3. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{n^2+1}{n} = +\infty$; 2. $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

Giải

1. Với mọi số thực dương M lớn tùy ý, ta có:

$$\left|\frac{n^2+1}{n}\right| > M \Leftrightarrow n^2 - Mn + 1 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$$

Ta chọn $n_0 = \left[\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right]$ thì ta có: $\frac{n^2+1}{n} > M, \ \forall n > n_0$

Do đó: $\lim \frac{n^2+1}{n} = +\infty$.

2. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta có:

$$\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M \Leftrightarrow n - M\sqrt{n} - 2 > 0 \Leftrightarrow n > \left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2$$

Ta chọn $n_0 = \left[\left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2\right]$ thì ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M, \ \forall n > n_0$

Do đó: $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ 2. $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$

Giải

1. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt[k]{\frac{1}{a}}$ ta có $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_a^k} < a \ \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

2. Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn n_M thỏa mãn $\frac{n_M^2 - 1}{n_M} > M \Leftrightarrow n_M > \frac{M + \sqrt{M^2+4}}{2}$

Ta có: $\frac{n^2-1}{n} > M \ \forall n > n_M \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{n} = +\infty$. Vậy $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$.

Bài 2. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$ 2. $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$ 3. $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$.

Giải

1. Ta có $\frac{|\cos n + \sin n|}{n^2} < \frac{2}{n^2}$ mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$

2. Với mọi số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{1}{a^2} - 1\right] + 1$

Ta có: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < a \ \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$.

3. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M = \left[\frac{M}{3}\right] + 1$

Ta có: $\frac{3n^3+n}{n^2} = 3n + \frac{1}{n} > M \ \forall n > n_M$. Vậy $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$.

Bài 3. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim \frac{2n+1}{n-2}$; 2. $B = \lim \frac{2n+3}{n^2+1}$.

Giải

1. Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{5}{a} + 2 > 2$

Ta có: $\left|\frac{2n+1}{n-2} - 2\right| = \frac{5}{|n-2|} < \frac{5}{n_a - 2} < a \ \forall n > n_a$. Vậy $A = 2$.

2. Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn n_a thỏa mãn: $\frac{2n_a+3}{n_a^2+1} < a \Leftrightarrow n_a > \frac{1+\sqrt{a^2-4a+13}}{a}$

Ta có: $\frac{2n+3}{n^2+1} < a \ \forall n > n_a \Rightarrow B = 0$.

Bài 4. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$; 2. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Giải

1. Gọi m là số tự nhiên thỏa mãn: $m + 1 > |a|$. Khi đó với mọi $n > m+1$

Ta có: $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\ldots\frac{a}{m}\right| \cdot \left|\frac{a}{m+1}\ldots\frac{a}{n}\right| < \frac{|a|^m}{m!} \cdot \left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$

Mà $\lim \left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} = 0$. Từ đó suy ra: $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

2. Nếu $a = 1$ thì ta có đpcm

- Giả sử $a > 1$. Khi đó: $a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

Suy ra: $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} \to 0$ nên $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

- Với $0 < a < 1$ thì $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Tóm lại ta luôn có: $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Bài 5. Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ. Tìm $\lim x_n$.

Giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau: $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 3$.

Thật vậy ta kiểm tra được ngay bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n \geq 3$, tức là $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}$.

Khi đó ta có: $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\left|2-\sqrt{2}-x_n\right| \le \frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\left(\left|\sqrt{2}-x_n\right|+\left|2-2\sqrt{2}\right|\right)$

$$<\frac{1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n+1$.

Mặt khác do $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên từ bất đẳng thức trên và nguyên lý kẹp ta có $\lim\left(x_n-\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \lim x_n=\sqrt{2}$.

***Chú ý*:** *Ta có kết quả sau:*

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa:* $|f(x)-f(y)|\le q.|x-y|$ *với mọi* $x,y\in\mathbb{R}$ *và* $q\in(0;1)$.

Khi đó dãy số (u_n) *được xác định bởi* $u_0=c;\ u_n=f(u_{n-1}),\ \forall n=2,3,...$ *có giới hạn hữu hạn là nghiệm của phương trình* $f(x)=x$.

Sử dụng kết quả trên ta có nghiệm của phương trình $f(x)=x$ *có nghiệm là* $\sqrt{2}$ *nên ta mới đi chứng minh* $\lim x_n=\sqrt{2}$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của dãy số dựa vào các định lý và các giới hạn cơ bản

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các định lí về giới hạn, biến đổi đưa về các giới hạn cơ bản.

- Khi tìm $\lim\frac{f(n)}{g(n)}$ ta thường chia cả tử và mẫu cho n^k, trong đó k là bậc lớn nhất của tử và mẫu.
- Khi tìm $\lim\left[\sqrt[k]{f(n)}-\sqrt[m]{g(n)}\right]$ trong đó $\lim f(n)=\lim g(n)=+\infty$ ta thường tách và sử dụng phương pháp nhân lượng liên hơn.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$ 2. $B=\lim\frac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

Giải

1. Ta có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Suy ra $A=\lim\frac{n^2}{2n^2+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suy ra: $B=\lim\frac{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+2n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}}+2n}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

2. $D=\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

Giải

1. Ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Do vậy $C=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ nên suy ra: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

Vậy $D=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau: $A=\lim\frac{4^{n+1}-5^{n+1}}{4^n+5^n}$;

Giải

Chia cả tử và mẫu cho 5^n ta có: $A=\lim\frac{4\left(\frac{4}{5}\right)^n-5}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=-5$ (do $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$).

Ví dụ 4. Tìm giới hạn sau: $C = \lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

Giải

Ta có: $1-\frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Do vậy $C = \lim\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4(n+2)^9}{n^{17}+1}$; 2. $B = \lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$.

Giải

1. Ta có: $A = \lim\frac{n^8(2+\frac{1}{n^2})^4.n^9(1+\frac{2}{n})^9}{n^{17}(1+\frac{1}{n^{17}})} = \lim\frac{(2+\frac{1}{n^2})^4.(1+\frac{2}{n})^9}{1+\frac{1}{n^{17}}}$

Suy ra $A = 16$.

2. Ta có: $B = \lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\frac{2}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{2+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}-1\right)} = \frac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$; 2. $B = \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$.

Giải

1. Ta có: $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right) = \lim\frac{9n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+9n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+9n^2}+n^2}$

$$= \lim\frac{9}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{9}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\frac{9}{n}}+1} = 3.$$

2. Ta có: $B = \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$

$$= \lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}-\lim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$= \lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}-\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{1}{3}.$$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $C = \lim\frac{\sqrt[4]{3n^3+1}-n}{\sqrt{2n^4+3n+1}+n}$ 2. $D = \lim\frac{a_kn^k+...+a_1n+a_0}{b_pn^p+...+b_1n+b_0}$ (Trong đó k, p là các số nguyên dương; $a_kb_p \neq 0$)

3. $E = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ 4. $F = \lim\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

Giải

1. Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được $C = \lim\frac{\sqrt[4]{\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^8}}-\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}} = 0$.

2. Ta xét ba trường hợp sau :

- $k > p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có:

$$D = \lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{p-k}}+...+\frac{b_0}{n^k}} = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } a_kb_p > 0 \\ -\infty \text{ nếu } a_kb_p < 0 \end{cases}.$$

- $k = p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có: $D = \lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_k+...+\frac{b_0}{n^k}} = \frac{a_k}{b_k}$.

- $k < p$. Chia cả tử và mẫu cho n^p : $D = \lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+...+\frac{b_0}{n^p}} = 0$.

3. Ta có: $E = \lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$.

4. Ta có: $F=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)=\lim\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=0$

$$\lim\left(\sqrt[3]{8n^2+n}-2n\right)=\lim\frac{n}{\sqrt[3]{(8n^2+n)^2}+2n\sqrt[3]{8n^2+n}+4n^2}=0$$

Vậy $F=0$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\dfrac{2n^3+\sin 2n-1}{n^3+1}$ 2. $B=\lim\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$

3. $C=\lim(\sqrt[k]{n^2+1}-\sqrt[p]{n^2-1})$

Giải

1. $A=\lim\dfrac{2+\dfrac{\sin 2n-1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^3}}=2$

2. Ta có: $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}<\dfrac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^3+2n}}\to 0\Rightarrow B=0$

3. Xét các trường hợp: **Trường hợp 1:** $k>p\Rightarrow C=-\infty$

Trường hợp 2: $k<p\Rightarrow C=+\infty$

Trường hợp 3: $k=p\Rightarrow C=0$.

Bài 5. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

1. $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

2. $u_n=(1-\dfrac{1}{T_1})(1-\dfrac{1}{T_2})...(1-\dfrac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. $u_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}.\dfrac{3^3-1}{3^3+1}....\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$. 4. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$.

Giải

1. Ta có: $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$. Suy ra $u_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1$.

2. Ta có: $1-\dfrac{1}{T_k}=1-\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. Suy ra $u_n=\dfrac{1}{3}.\dfrac{n+2}{n}\Rightarrow\lim u_n=\dfrac{1}{3}$

3. Ta có $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}\Rightarrow u_n=\dfrac{2}{3}.\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)n}\Rightarrow\lim u_n=\dfrac{2}{3}$.

4. Ta có: $n\dfrac{n}{n^2+n}\le u_n\le n\dfrac{n}{n^2+1}\Rightarrow\dfrac{-n}{n^2+1}\le u_n-1\le\dfrac{-1}{n^2+1}\Rightarrow|u_n-1|\le\dfrac{n}{n^2+1}\to 0\Rightarrow\lim u_n=1$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\dfrac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+...+b_1n+b_0}$ với $a_kb_p\neq 0$

2. $B=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$

Giải

1. Ta chia làm các trường hợp sau:

* **Trường hợp 1:** $n=k$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được:

$$A=\lim\frac{a_k+\dfrac{a_{k-1}}{n}+...+\dfrac{a_0}{n^k}}{b_p+\dfrac{b_{p-1}}{n}+...+\dfrac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_p}.$$

* **Trường hợp 2:** $k>p$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được:

$$A=\lim\frac{a_k+\dfrac{a_{k-1}}{n}+...+\dfrac{a_0}{n^k}}{\dfrac{b_p}{n^{k-p}}+\dfrac{b_{p-1}}{n^{k-p+1}}+...+\dfrac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty & \text{khi } a_kb_p>0\\ -\infty & \text{khi } a_kb_p<0\end{cases}$$

* **Trường hợp 3:** $k<p$, chia cả tử và mẫu cho n^p, ta được:

$$A=\lim\frac{\dfrac{a_k}{n^{p-k}}+\dfrac{a_{k-1}}{n^{p-k+1}}+...+\dfrac{a_0}{n^p}}{b_p+\dfrac{b_{p-1}}{n}+...+\dfrac{b_0}{n^p}}=0.$$

2. Ta có: $B=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\frac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}$$

$$=\lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

Vậy $B=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

Bài 7. 1. Cho các số thực a,b thỏa $|a|<1;|b|<1$. Tìm giới hạn $I=\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$.

2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=x_n^2+x_n, \forall n\geq 1$

Đặt $S_n=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n(u_n+1)^2-8}{5}, (n\geq 1, n\in N) \end{cases}$

Xét sự hội tụ và tính giới hạn sau nếu tồn tại: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-2}{u_i^2+1}$.

Giải

1. Ta có $1,a,a^2,...,a^n$ là một cấp số nhân công bội a.

$$1+a+a^2+...+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Tương tự: $1+b+b^2+...+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Suy ra $\lim I=\lim\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}$ (Vì $|a|<1,|b<1|\Rightarrow \lim a^{n+1}=\lim b^{n+1}=0$).

2. Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1}>x_n$, $\forall n=1,2,...$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n=x$

Với x là nghiệm của phương trình : $x=x^2+x\Leftrightarrow x=0<x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n=+\infty$.

Mặt khác: $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$

Suy ra: $\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$

Dẫn tới: $S_n=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}=2-\frac{1}{x_{n+1}}\Rightarrow \lim S_n=2-\lim\frac{1}{x_{n+1}}=2$

3. Ta chứng minh được: $u_n\geq 3;\forall n\in \mathbb{N}^*$, do đó $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+2)^2(u_n-2)}{5}>0$

Từ đó thấy (u_n) tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn, khi đó tồn tại giới gạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n=a$ và ta có: $a=\frac{a(a+1)^2-8}{5}\Leftrightarrow a^3+2a^2-4a-8=0\Leftrightarrow a=\pm 2$ (loại)

Do đó $\lim u_n=+\infty$

Ta lại thấy rằng: $u_{n+1}=\frac{u_n(u_n+1)^2-8}{5}\Rightarrow\frac{u_n-2}{u_n^2+1}=\frac{1}{u_n+2}-\frac{1}{u_{n+1}+2}, \forall n\in \mathbb{N}^*$

Vì vậy nên: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-2}{u_i^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1+2}-\frac{1}{u_{n+1}+2}\right)=\frac{1}{5}$.

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $u_1=2$ và

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2011}+\frac{2010}{2011}u_n \text{ với } n=1,2,3,...$$

1. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và không bị chặn trên.

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{u_{i+1}-1}$.

Giải

1. Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh được: $u_n>1, \forall n=1,2,...$

Ta có: $u_1=2>1$. Giả sử $u_n>1\Rightarrow u_{n+1}>\frac{1}{2011}+\frac{2010}{2011}=1$

Do đó: $u_n>1$, $\forall n=1,2,...$. Do $u_n>1\Rightarrow u_n^2>u_n$

Nên $u_{n+1}>\frac{u_n}{2011}+\frac{2010}{2011}u_n=u_n$, suy ra dãy (u_n) là dãy tăng

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên, khi đó tồn tại $\lim u_n=x>1$

Suy ra: $x=\frac{x^2}{2011}+\frac{2010}{2011}x\Rightarrow x=0$ (vô lí). Từ đó ta có: $\lim u_n=+\infty$

2. Ta có: $u_{n+1}-1=\frac{1}{2011}(u_n^2+2010u_n-2011)=\frac{1}{2011}(u_n-1)(u_n+2011)$

Suy ra: $$\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{2011}{2012}\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_n+2011}\right)\ (1)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=\frac{2011}{2012}\left(\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{u_n}{u_n+2011}\right)=\frac{2011}{2012}\left(\frac{1}{u_n-1}+\frac{2011}{u_n+2011}\right)$$

Mà từ (1) $\Rightarrow \frac{1}{u_k+2011}=\frac{1}{u_k-1}-\frac{2012}{2011}.\frac{1}{u_{k+1}-1}$

Do đó: $$\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}-1}=2012\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k-1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{u_k-1}\right)=2012\left(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$

Vậy $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}-1}=\lim 2012\left(\frac{1}{u_1-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=2012$.

Bài 9. 1. Cho dãy số $(u_n): u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Cho dãy số (u_n) thỏa: $u_n+u_{n+1}\ge 2u_{n+2}$ và dãy (u_n) bị chặn. Chứng minh rằng dãy (u_n) tồn tại giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n^2+4u_n+1}{u_n^2+u_n+1}, n\ge 1 \end{cases}$. Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải

1. Ta chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên

- Chứng minh dãy (u_n) tăng, tức là: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho n số gồm

$$\frac{1+(1+\frac{1}{n})+...+(1+\frac{1}{n})}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Suy ra: $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow u_{n+1}>u_n$, dãy (u_n) là dãy tăng.

- Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3.

Ta chứng minh: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<\frac{n^2}{k^2}+\frac{n}{k}+1\quad ,1\le k\le n$ (2). Thật vậy:

* Với $k=1\Rightarrow VT(2)=1+\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1=VP(2)$. Nên (2) đúng với $k=1$.

* Giải sử (2) đúng với $k=p,\ 1\le p\le n-1$, tức là: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p<\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1$ (3).

Ta chứng minh (2) đúng với $k=p+1$, tức là $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}<\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1$ (4).

Thật vậy: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{p^2}{n^3}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1\le\frac{p}{n^2}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1$$

$$<\frac{p^2+2p+1}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1=\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1.$$

Do vậy (2) được chứng minh.

Từ (2) ta suy ra $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\Rightarrow u_n<3,\ \forall n$, suy ra dãy (u_n) bị chặn trên

Vì dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Xét dãy $(v_n): v_n=\max\{u_n,u_{n+1}\}$, ta có dãy (v_n) bị chặn

Từ giả thiết ta suy ra: $\max\{u_n,u_{n+1}\}\ge u_{n+2}\Rightarrow\max\{u_n,u_{n+1}\}\ge\max\{u_{n+1},u_{n+2}\}$

Do đó dãy (v_n) là dãy số giảm, từ đó suy ra tồn tại $\lim v_n=l$

Ta chứng minh: $\lim u_n=l$.

Vì $\lim v_n=l$ nên với mọi $\varepsilon>0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$|v_n-l|<\frac{\varepsilon}{3}\Leftrightarrow l-\frac{\varepsilon}{3}<v_n<l+\frac{\varepsilon}{3},\ \forall n>n_0$$

Với mọi $k>n_0+1$ ta có: $v_{k-1}=\max\{u_{k-1},u_k\}<l+\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow u_{k-1}<l+\frac{\varepsilon}{3}$ (*)

Ta xét các trường hợp sau:

- $u_k>l-\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow l-\frac{\varepsilon}{3}<u_k\le v_k<l+\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow|u_k-l|<\frac{\varepsilon}{3}$.
- $u_k\le l-\frac{\varepsilon}{3}$, suy ra $u_{k+1}>l-\frac{\varepsilon}{3}$

Khi đó: $u_k \ge 2u_{k+1} - u_{k-1} > 2\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right) = 1-\varepsilon$

Dẫn tới: $1-\varepsilon < u_k \le v_k < 1+\frac{\varepsilon}{3} < 1+\varepsilon \Rightarrow |u_k - 1| < \varepsilon$. Vậy $\lim u_n = 1$.

3. Ta thấy $u_n > 0, \forall n$ và từ: $u_{n+1} = \frac{u_n^2+4u_n+1}{u_n^2+u_n+1} = 1+\frac{3u_n}{u_n^2+u_n+1} = 2-\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2+u_n+1}$, ta có: $1 < u_n < 2, \forall n$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}, x \in (1;2)$ ta chứng minh được hàm f nghịch biến trên $(1;2)$.

Dãy số đó cho có thể viết dưới dạng: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \ge 1 \end{cases}$

Ta thấy: $u_1 = 1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 < u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5$.

Tiến hành tương tự, suy ra: $u_1 < u_3 < u_5 < ....$ suy ra dãy u_{2n+1} tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là $\alpha \in [1;2]$.

$u_2 > u_4 > u_6 > ...$ suy ra dãy u_{2n} giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là $\beta \in [1;2]$.

Ta có: $\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases}$. Chuyển qua giới hạn, ta có: $\begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

$$\Rightarrow \alpha - \beta = f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\beta^2+4\beta+1}{\beta^2+\beta+1} - \frac{\alpha^2+4\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 3\left(\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1} - \frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}\right) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{3(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ 3(\alpha\beta - 1) = (\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1) \end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình thứ hai không có giá trị $\alpha, \beta \in [1;2]$ thỏa mãn $\alpha = \beta = t$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = t$, hai dãy con đó có cùng giới hạn là t.

Ta thấy, t phải thỏa mãn đẳng thức: $t = \frac{t^2+4t+1}{t^2+t+1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1$ (*).

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm $|t| \le 2$. Đặt $t = 2\cos\varphi, \varphi \in [0;2\pi]$, thay vào phương trình (*) ở trên: $8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$.

Do $\varphi \in [0;2\pi]$ nên: $\varphi = \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}$, tương ứng với các nghiệm của (*) là: $t = 2\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{5\pi}{9}; 2\cos\frac{7\pi}{9}$.

Phương trình (*) đó có đủ 3 nghiệm nên nó không có nghiệm $|t| > 2$.

Trong các nghiệm này, chỉ có $t = 2\cos\frac{\pi}{9} \in [1;2]$ thỏa mãn và đây cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số u_n có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

Bài 10. Tìm $\lim u_n$ biết:

1. $u_n = (1-\frac{1}{T_1})(1-\frac{1}{T_2})...(1-\frac{1}{T_n})$ trong đó $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}....\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

3. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

4. $u_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{\text{n dấu căn}}$.

Giải

1. Ta có: $1-\frac{1}{T_k} = 1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. Suy ra $u_n = \frac{1}{3}.\frac{n+2}{n} \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{3}$.

2. Ta có $\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$. Suy ra $u_n = \frac{2}{3}.\frac{n^2+n+1}{(n-1)n} \Rightarrow \lim u_n = \frac{2}{3}$

3. Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, k = 1,2,...,n$. Suy ra $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < u_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ nên suy ra $\lim u_n = 1$.

4. Ta có: $u_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ nên $\lim u_n = \lim 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$.

Bài 11. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_n = 2n + a\sqrt[3]{8n^3+1} \forall n \in N$, a là số thực cho trước.

1. Tìm điều kiện của a để dãy số trên có giới hạn hữu hạn.

2. Tìm điều kiện của a sao cho dãy số trên là dãy số tăng.

Giải

1. • Nếu $a \ge 0$ thì ta có: $\lim x_n = +\infty$

• Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ a \ne -1 \end{cases}$ thì : $\lim x_n = \lim n\left(2 + 2a\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8n^3}}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a > -1 \\ -\infty \text{ khi } a < -1 \end{cases}$

• Nếu $a = -1$ ta có: $\lim x_n = 0$

Vậy $a = -1$ là giá trị cần tìm.

2. Dãy số (x_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow x_{n+1} \ge x_n;\ \forall n$

$$\Leftrightarrow 2 + a\sqrt[3]{8(n+1)^3 + 1} \ge a.\sqrt[3]{8n^3 + 1} \Leftrightarrow a \ge \frac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}} \quad (1)$$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}} < -1$ và $\lim \frac{2}{\sqrt[3]{8n^3+1} - \sqrt[3]{8(n+1)^3+1}} = -1$

Nên (*) đúng với mọi $n \Leftrightarrow a \ge -1$.

Bài 12. 1. Giả sử $f(x)$ là hàm số được xác định trên tập số thực R và thỏa mãn bất phương trình: $9f(4x) \ge 4 + 4\sqrt{12f(3x) - 9f(4x)}$.

Chứng minh: $f(x) \ge u_n\ \forall n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$. Từ đó hãy suy ra $f(x) \ge \frac{4}{3}$.

2. Cho các dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a; y_1 = b; z_1 = c \\ x_n = \frac{y_{n-1} + z_{n-1}}{2}, y_n = \frac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2}, z_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \end{cases}$$

Chứng minh rằng các dãy trên cùng hội tụ về giá trị $\frac{a+b+c}{3}$.

Giải

1. Để chứng minh $f(x) \ge u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ ta cần chứng minh $f(x) \ge \frac{4}{9}$ và $f(x) \ge -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f(ax)}$.

Thật vậy, từ $9f(4x) \ge 4 + 4\sqrt{12f(3x) - 9f(4x)}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 9f(4x) \ge 4, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \ge \frac{4}{9}$ (1)

Lại có $9f(4x) - 4 \ge 4\sqrt{12f(3x) - 9f(4x)} \Rightarrow (9f(4x) + 4)^2 \ge \left(8\sqrt{3f(3x)}\right)^2$

$\Rightarrow f(4x) \ge -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f(3x)} \Rightarrow f(x) \ge -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f(\frac{3}{4}x)}$ (2)

Bây giờ ta chứng minh $f(x) \ge u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ theo quy nạp.

- $n = 1$, thì theo (1)có $f(x) \ge \frac{4}{9} = u_1$ nên khẳng định đúng.
- Giả sử $f(x) \ge u_n$, và $\forall x \in \mathbb{R}$ thì theo (2) ta có :

$f(x) \ge -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3f(\frac{3}{4}x)} \ge -\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{3u_n} = u_{n+1}$ theo qui nạp ta có đpcm.

Từ $f(x) \ge u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$ lấy giới hạn hai vế khi $n \to +\infty$ thu được $f(x) \ge \frac{4}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Ta có $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n = ... = a + b + c$

mặt khác $x_{n+1} - y_{n+1} = (-\frac{1}{2})(x_n - y_n) = ... = (-\frac{1}{2})^n(a - b) \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0$

Tương tự ta có $\lim(y_n - z_n) = 0, \lim(z_n - x_n) = 0$

Ta lại có $\left|x_n - \frac{a+b+c}{3}\right| = \left|x_n - \frac{x_n + y_n + z_n}{3}\right| = \left|\frac{x_n - y_n}{3} + \frac{x_n - z_n}{3}\right|$

Từ đó ta có $0 \le \left|x_n - \frac{a+b+c}{3}\right| \le \left|\frac{x_n - y_n}{3}\right| + \left|\frac{x_n - z_n}{3}\right|$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a+b+c}{3}$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 13. 1. Dãy số (a_n) được xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{3}{2} \\ a_{n+1} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}}, \forall n = 2,3,4.. \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

2. Cho dãy (x_n): $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}\right), \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

3. Cho $a, b \in \mathbb{N}^\star, (a,b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, ...\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u,v) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ sao cho $n = au + bv$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$.

Giải

1. Ta xét hai dãy :

$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$ và $m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$

Ta chứng minh $\{M_n\}$ là dãy số giảm và $\{m_n\}$ là dãy số tăng.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh: $a_{n+4} \le \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$.

Thật vật nếu $a_{n+4} \ge a_{n+3}$ thì $\dfrac{2}{a_{n+3} + a_{n+2}} \ge a_{n+3}$

Suy ra : $2 \ge (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$.

Khi đó: $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_{n+3}} - a_{n+2} = \dfrac{2}{a_{n+3}} - \dfrac{2}{a_{n+2} + a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4}$

$$= 2.\frac{a_{n+2}}{(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \ge a_{n+4}$$

Từ đây suy ra: $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó:

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} > M_{n+1}.$$

Do đó dãy $\{M_n\}$ là dãy giảm.

Tương tự ta chứng minh được dãy $\{m_n\}$ tăng.

Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ.
Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.
Suy ra dãy (a_n) hội tụ và $\lim a_n = 1$.

2. Ta có: $x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0$

Nên dãy (x_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại $\lim x_n = x > 0$

Ta có phương trình: $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x\right) \Leftrightarrow x = 0$ (vô lí)

Do vậy, ta có được: $\lim x_n = +\infty$. Từ công thức truy hồi, ta có được:

$(2x_n - x_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1}$

Dẫn tới: $\dfrac{1}{x_{n-1}} = \dfrac{x_n + 1}{x_n^2} = \dfrac{1}{x_n^2} + \dfrac{1}{x_n} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^2} = \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n}$ với $\forall n \ge 2$

Suy ra: $y_n = \dfrac{1}{x_1^2} + \left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right) + \left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n}\right) = 6 - \dfrac{1}{x_n}$

Mà $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = 0$. Vậy $\lim y_n = 6$.

3. Xét phương trình $au + bv = n$ (1).

Gọi (u_0, v_0) là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử (u, v) là một nghiệm nguyên dương khác (u_0, v_0) của (1).

Ta có $au_0 + bv_0 = n, au + bv = n$ suy ra $a(u - u_0) + b(v - v_0) = 0$ do đó tồn tại k nguyên dương sao cho $u = u_0 + kb, v = v_0 - ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0 - ka \ge 1 \Leftrightarrow k \le \dfrac{v_0 - 1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số k nguyên dương cộng với 1. Do đó $r_n = \left[\dfrac{v_0 - 1}{a}\right] + 1 = \left[\dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a}\right] + 1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a} \le r_n \le \dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a} + 1$.

Từ đó suy ra : $\dfrac{1}{ab} - \dfrac{u_0}{nb} - \dfrac{1}{na} \le \dfrac{r_n}{n} \le \dfrac{1}{ab} - \dfrac{u_0}{nb} - \dfrac{1}{na} + \dfrac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n} = \dfrac{1}{ab}$.

Bài 14. 1. Cho dãy $(x_n): x_1 = 1;\ x_{n+1} = \dfrac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2\alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$ trong đó α là số thực. Đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2x_i + 1}$ $\forall n \ge 1$. Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2. Cho c là một số thực dương. Dãy (x_n) được xây dựng như sau: $x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$, $n = 0,1,2..$ nếu các biểu thức dưới dấu căn không âm. Tìm tất cả các giá trị của c, để với mọi giá trị ban đầu $x_0 \in (0; c)$, dãy (x_n) xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giải

1. Ta có $\dfrac{1}{2x_{n+1} + 1} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{3} + \dfrac{1}{3(2x_n + 1)} \Rightarrow \dfrac{1}{2x_n + 1} = \dfrac{1}{3^n} + (1 - \dfrac{1}{3^{n-1}})\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2x_i + 1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} + \sin^2\alpha \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{3^{i-1}}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) + [n - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n})]\sin^2\alpha$$

Vì $\lim \dfrac{1}{3^n} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

Khi đó $\lim y_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Ta có x_1 xác định khi $c > \sqrt{c + x_0} \Leftrightarrow c(c-1) > x_0 \Rightarrow c(c-1) \ge c \Rightarrow c \ge 2$

Ta chứng minh với $c > 2$ thì dãy (x_n) hoàn toàn xác định.

Vì $\begin{cases} c > 2 \\ x_0 < c \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x_0 + c} < \sqrt{2c} < c \Rightarrow c - \sqrt{c + x_0} > 0 \Rightarrow x_1$ xác định.

Giả sử x_k được xác định. Khi đó $0 < x_k < \sqrt{c} < c \Rightarrow \sqrt{c + x_k} < \sqrt{2c} < c$

Suy ra $c - \sqrt{c + x_k} > 0 \Rightarrow x_{k+1}$ xác định.

Gọi $a > 0$ là nghiệm của phương trình : $x^2 + x + 1 - c = 0$.

Ta chứng minh: $\lim x_n = a$. Thật vậy:

$$|x_{n+1} - a| = \frac{\left|c - \sqrt{c + x_n} - a^2\right|}{\sqrt{c - \sqrt{c + x_n}} + a} = \frac{\left|a + 1 - \sqrt{c + x_n}\right|}{\sqrt{c - \sqrt{c + x_n}} + a}$$

$$< \frac{\left|(a+1)^2 - (c + x_n)\right|}{a\left(a + 1 + \sqrt{c + x_n}\right)} < \frac{|x_n - a|}{a(a + 1 + \sqrt{c})} = \frac{|x_n - a|}{c - 1 + a\sqrt{c}}$$

Suy ra: $|x_{n+1} - a| < \dfrac{|x_1 - a|}{\left(c - 1 + a\sqrt{c}\right)^n}$

Do $c - 1 + a\sqrt{c} > 1 \Rightarrow \lim \dfrac{1}{\left(c - 1 + a\sqrt{c}\right)^n} = 0$. Do đó $\lim x_n = a = \dfrac{-1 + \sqrt{4c - 3}}{2}$.

CHƯƠNG 2: GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

1.1. Giới hạn hàm số: Cho khoảng K chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n) \to L$. Ta kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

1.2. Giới hạn một bên:

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): x_0 < x_n < b$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n): a < x_n < x_0$ mà $x_n \to x_0$ thì ta có: $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

1.3. Giới hạn tại vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

1.4. Giới hạn vô cực

* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n): x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to +\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

* Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực

* Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay x_0 bởi $-\infty$ hoặc $+\infty$.

2. Các định lí về giới hạn

* ***Định lí 1:*** Gói hạn của tổng, hiệu, tích, thương (mẫu số dẫn về $L \ne 0$) khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$) bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn đó khi $x \to x_0$ (hay $x \to +\infty; x \to -\infty$).

Chú ý: Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực.

* ***Định lí 2 (Nguyên lí kẹp):*** Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $g(x) \le f(x) \le h(x)$ $\forall x \in K$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3. Một số giới hạn đặc biệt

* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{2k+1} = +\infty\ (-\infty)$

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{k}{f(x)} = 0\ (k \ne 0)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+1)$ 2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ 4. $D=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$

Giải

1. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=1$ ta có: $A=\lim\left(3x_n^2+x_n+1\right)=3+1+1=5$.

2. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=1$ và $x_n\neq 1\ \forall n$ ta có:

$$B=\lim\frac{(x_n-1)(x_n^2+x_n+1)}{x_n-1}=\lim\left(x_n^2+x_n+1\right)=3.$$

3. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=2$ và $x_n\neq 2\ \forall n$ ta có:

$$B=\lim\frac{\sqrt{x_n+2}-2}{x_n-2}=\lim\frac{(x_n-2)}{(x_n-2)\left(\sqrt{x_n+2}+2\right)}=\lim\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+2}=\frac{1}{4}$$

4. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n=+\infty$ ta có: $D=\lim\dfrac{3x_n+2}{x_n-1}=\lim\dfrac{3+\dfrac{2}{x_n}}{1-\dfrac{1}{x_n}}=3$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x\to 0$ 2. $f(x)=\cos^5 2x$ khi $x\to\infty$.

Giải

1. Xét hai dãy $(x_n): x_n=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+n2\pi\right)^2}, (y_n): y_n=\dfrac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n=\lim y_n=0$ và $\lim f(x_n)=1;\ \lim f(y_n)=0$.

Nên hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$.

2. Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n=n\pi;\ y_n=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

Giải

Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=x_0$ ta có: $\lim|f(x_n)|=0\Rightarrow\lim f(x_n)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{2x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$.

Giải

1. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=1$ ta có: $\lim\dfrac{x_n+1}{x_n-2}=-2$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$.

2. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{2x-1}=\lim\dfrac{3x_n+2}{2x_n-1}=\dfrac{3.1+2}{2.1-1}=5$.

3. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=0$ ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}=\lim\frac{\sqrt{x_n+4}-2}{2x_n}=\lim\frac{x_n}{2x_n\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\lim\frac{1}{2\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

4. Với mọi dãy $(x_n): x_n>1,\ \forall n$ và $\lim x_n=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}=\lim\dfrac{4x_n-3}{x_n-1}=+\infty$.

Bài 2. Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ khi $x\to 0$ 2. $f(x)=\cos x$ khi $x\to+\infty$.

Giải

1. Xét hai dãy số $x_n=\dfrac{1}{\pi+2n\pi}, y_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\Rightarrow\lim x_n=\lim y_n=0$

Mà $\lim f(x_n)=\lim\left[\sin(\pi+2n\pi)\right]=0$

$\lim f(y_n)=\lim\left[\sin(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi)\right]=1$

Suy ra $\lim f(x_n)\neq\lim f(y_n)$. Vậy hàm số f không có giới hạn khi $x\to 0$.

2. Xét hai dãy $x_n = 2n\pi, y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \lim x_n = \lim y_n = +\infty$

Mà $\lim f(x_n) = \lim\left[\cos(2n\pi)\right] = 1$

$\lim f(y_n) = \lim\left[\cos(\frac{\pi}{2} + n\pi)\right] = 0$

Suy ra $\lim f(x_n) \ne \lim f(y_n)$. Vậy hàm số f không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

Bài 3. Chứng minh rằng các hàm số sau không có giới hạn:

$$f(x) = \cos\frac{1}{x^2} \text{ khi } x \to 0$$

Giải

Xét hai dãy $(x_n),(y_n)$ xác định bởi $x_n = \sqrt{\frac{1}{2n\pi}}, y_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$

Nhưng: $\lim f(x_n) = 1;\ \lim f(y_n) = 0$ nên hàm số f không có giới hạn khi $x \to 0$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

BÀI TOÁN 01: TÌM $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ BIẾT $f(x)$ XÁC ĐỊNH TẠI x_0

I. PHƯƠNG PHÁP

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 3\cos x + x}{2x + \cos^2 3x}$; 2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{\sqrt[3]{x + 6} + 2x - 1}$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 3\cos x + x}{2x + \cos^2 3x} = \frac{\sin 0 + 3\cos 0 + 0}{2.0 + \cos^2 0} = 3$

2. Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{\sqrt[3]{x + 6} + 2x - 1} = \frac{\sqrt{2^2 + 3} - 2.2}{\sqrt[3]{2 + 6} + 2.2 - 1} = \frac{\sqrt{7} - 4}{5}$.

Ví dụ 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{3x + 2}{3} & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}$ khi $x \to 1$;

2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{khi } x \ge 0 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ khi $x \to 0$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x + 2}{3} = \frac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{5}{3}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{5}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 + 3x + 1) = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Ví dụ 3. Tìm m để các hàm số:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + 2m + 1}{x + 1} & \text{khi } x \ge 0 \\ \frac{2x + 3m - 1}{\sqrt{1 - x} + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 0$;

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{1 - x}} + mx + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3mx + 2m - 1 & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 1$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2 + mx + 2m + 1}{x + 1} = 2m + 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2x + 3m - 1}{\sqrt{1 - x} + 2} = \frac{3m - 1}{3}$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 2m + 1 = \frac{3m - 1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3mx + 2m - 1) = 5m - 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(-(x+2)\sqrt{1-x} + mx + 1\right) = m + 1$$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 5m - 1 = m + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm giới hạn các hàm số sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$; 2. $B = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x + 1}{\sin x + 1}$;

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2} - x + 1}{3x + 1}$; 4. $D = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1} + 1}{x - 2}$.

Giải

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$.

2. Ta có $B = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\tan x + 1}{\sin x + 1} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{6} + 1}{\sin\frac{\pi}{6} + 1} = \dfrac{4\sqrt{3} + 6}{9}$.

3. Ta có: $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2} - x + 1}{3x + 1} = \sqrt[3]{2} + 1$.

4. Ta có: $D = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1} + 1}{x - 2} = \dfrac{\sqrt[3]{8} + 1}{1 - 2} = -3$.

Bài 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 5x^2 + 4 & \text{khi } x \ge 1 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ khi $x \to 1$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$ tại $x \to 2$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x^3 - 5x^2 + 4\right) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x - 1\right) = 2$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2 + 2x + 4\right) = 12$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x + 1\right) = 5$

Do đó không tồn tại giới hạn của f khi $x \to 2$.

Bài 3. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 & \text{khi } x \ge 1 \\ -3x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x = 1$;

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}$ tại $x = 2$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 12 \ne 5 = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$. Hàm số không có giới hạn khi $x \to 2$.

Bài 4. 1. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x \to 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \le 2 \end{cases}.$$

2. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \ge 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2 + ax + 2) = 2a + 6$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2 - x + 1) = 7$.

Hàm số có giới hạn khi $x \to 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 2a + 6 = 7 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

2. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2a + 1 = 1 + \sqrt{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5. Tìm a để hàm số:

1. $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ có giới hạn tại $x\to 0$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>1\\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5ax^2+3x+2a+1\right)=2a+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x+\sqrt{x^2+x+2}\right)=1+\sqrt{2}$

Vậy $2a+1=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax+2)=a+3$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-x+3a)=3a+1$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow a+3=3a+1\Leftrightarrow a=1$. Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

BÀI TOÁN 02 : TÌM $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ TRONG ĐÓ $f(x_0)=g(x_0)=0$

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bozu cho đa thức:

I. ĐỊNH LÍ: Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta có: $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\dfrac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

Chú ý: Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$
3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích: $\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c)$.

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau:

$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$; 2. $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-5x^3+2x^2+6x-4}{x^3-x^2-x+1}$.

Giải

1. Ta có: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

Suy ra: $\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)=n$.

2. Ta có: $x^5-5x^3+2x^2+6x-4=(x-1)^2(x+2)(x^2-2)$

$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x^2-2)}{x+1}=-\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ 2. $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}$.

Giải

1. Ta có: $(1+mx)^n = 1 + mnx + \frac{m^2n(n-1)x^2}{2} + m^3x^3.A$

Với $A = C_n^3 + mxC_n^4 + ... + (mx)^{n-3}C_n^n$

$(1+nx)^m = 1 + mnx + \frac{n^2m(m-1)x^2}{2} + n^3x^3B$

Với $B = C_m^3 + nxC_m^4 + ... + (nx)^{m-3}C_m^m$

Do đó: $C = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} + x\left(m^3A - n^3B\right)\right]$

$= \frac{m^2n(n-1) - n^2m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}$.

2. Ta có: $\frac{(1+2x)^2(1+3x)^3 - 1}{x} = \frac{\left(1+2x^2\right)\left[(1+3x)^3 - 1\right]}{x} + \frac{(1+2x)^2 - 1}{x}$

$= (1+2x)^2\left(9 + 27x + 27x^2\right) - (4+4x)$

Suy ra: $D = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^2\left(9+27x+27x^2\right) - (4+4x)\right] = 5$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1}$ 2. $B = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2} - x}{\sqrt{3x-2} - 2}$.

Giải

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x - 1 - x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1} + x)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-1} + x)} = 0$.

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(3x+2-x^3)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{-(x^2+2x+1)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} = -1$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $B = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x - 1}$ 2. $C = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1}$.

Giải

1. Đặt $t = x - 1$ ta có: $B = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{2t+1} - 1}{t} = \frac{2}{3}$.

2. Ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3} - 1 = \sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}\left(\sqrt[4]{4x-3} - 1\right) +$

$+\sqrt{2x-1}\left(\sqrt[3]{3x-2} - 1\right) + \sqrt{2x-1} - 1$

Mà: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1} = 1$

Nên ta có: $C = 1 + 1 + 1 = 3$.

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt{5x-1}}{x-1}$ 2. $B = \lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

Giải

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2 - (\sqrt{5x-1} - 2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x-1} - \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1} - 2}{x-1} = I - J$

$I = \lim\limits_{x\to 1}\frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4} = \frac{7}{12}$.

$J = \lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1} + 1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{\sqrt{5x-1} + 1} = \frac{5}{3}$

Vậy $A = -\frac{2}{3}$.

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \lim\limits_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} - \frac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} = \lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2} + 3} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7} = \lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+20})^2 + 3\sqrt[3]{x+20} + 9} = \frac{1}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7} = \lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(\sqrt[4]{x+9})^3 + 2(\sqrt[4]{x+9})^2 + 4\sqrt[4]{x+9} + 8} = \frac{1}{32}$.

Vậy $B = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{27}}{\frac{1}{32}} = \frac{112}{27}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm các gới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3-2^3}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1.$$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-4x)^4-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x[(1+3x)^2+(1+3x)+1]}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{-4x(2-4x)[(1-4x)^2+1]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}3[(1+3x)^2+(1+3x)+1]+\lim_{x\to 0}4(2-4x)[(1-4x)^2+1]=25.$$

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6$.

Bài 2. Tìm các gới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m,n\in \mathbb{N}^*)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N}^*, a\neq 0)$

3. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$

4. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1}=\dfrac{n}{m}$.

2. * **Cách 1:** Nhân liên hợp

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[n]{1+ax}-1)(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1}=\frac{a}{n}.$$

* **Cách 2:** Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

$$\Rightarrow B=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^n+...+t+1)}=\frac{a}{n}.$$

3. Áp dụng bài toán trên ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[m]{1+bx}-1}=\frac{a}{n}.\frac{m}{b}=\frac{am}{bn}.$$

4. Ta có: $\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1$

$$=\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}(\sqrt[4]{1+\gamma x}-1)+\sqrt{1+\alpha x}((\sqrt[3]{1+\beta x}-1)+(\sqrt{1+\alpha x}-1)$$

$$B=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x})\frac{\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\alpha x}\frac{\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$B=\frac{\gamma}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}.$$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

5. $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ **6.** $F=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})...(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+1)}=\dfrac{1}{3}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}=\dfrac{-1}{3}$.

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+\sqrt[4]{(2x+1)^2}+\sqrt[4]{2x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}-\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=A'-B'$

$$A' = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2} = \lim_{x\to 7}\frac{2\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right)} = \frac{64}{27}$$

$$B' = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2} = \lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+3\right)} = \frac{8}{3}$$

$$D = A' - B' = \frac{64}{27} - \frac{8}{3} = \frac{-8}{27}.$$

5. Ta có: $F = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^m-(1+mnx)}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+mnx)}{x^2} = \dfrac{mn(n-m)}{2}$.

6. Ta có: $K = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)\dots(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\dots+1)} = \dfrac{1}{n!}$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$

2. $B = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$

4. $D = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$

Giải

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)} = -\dfrac{2}{5}$

2. Ta có: $B = \left(\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7} - \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\right)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4(x-7)}{(x-7)\left[\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right]} = \dfrac{4}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \dfrac{1}{6}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2} = 16$

Do đó: $B = 16\left(\dfrac{4}{27}-\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{8}{27}$.

3. Đặt $y = \sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} \Rightarrow y \to 1$ khi $x \to 0$

Và: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)-1}{x} = 9$

Do đó: $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x\left(y^{n-1}+y^{n-2}+\dots+y+1\right)} = \dfrac{9}{n}$

4. Ta có: $D = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x} - \dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}\right).\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \left(\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}\right).2 = \dfrac{2(an-bm)}{mn}$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$

2. $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$

3. $C = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$

4. $D = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$.

Giải

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1\right]} = \dfrac{2}{3}$

Vậy $A = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5(x-1)\left[\sqrt{4x+5}+3\right]} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \dfrac{2}{5}$.

3. Ta có: $C = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}-1}{\sqrt{x+2}-1} - \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{\sqrt[4]{2(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}} - \lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{-3(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} - \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 3$$

4. Ta có: $D = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x^3-3x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x+1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)} = 1.$$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ 2. $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$.

Giải

1. * **Cách 1:** Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{t^3-1}{3}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

Nên $A=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{t^3-1}{3}}-t}{\left(\dfrac{t^3-1}{3}\right)^2}=9\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}-t}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t^3-3t^2+2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}+t\right)}=3\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2(t+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t+2}{(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}+t\right)}=\frac{1}{2}.$$

* **Cách 2:** Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}-\lim_{x\to 0}\frac{-3-x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+(1+x)^2}$$

Do đó: $A=\dfrac{1}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2(x-1)}$

Đặt $t=x+1$. Khi đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4t}-\sqrt[3]{1+6t}}{t^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4t}-(2t+1)}{t^2}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6t}-(2t+1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4t}+2t+1}-\lim_{t\to 0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)^2}=2.$$

Do đó: $B=-1$.

BÀI TOÁN 03: TÌM $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, TRONG ĐÓ $f(x),g(x)\to\infty$, DẠNG NÀY TA CÒN GỌI LÀ DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{\infty}{\infty}$.

I. PHƯƠNG PHÁP: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{k}{x^n}=0\ (n>0;k\neq 0)$. * $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ (k\neq 0)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$; 2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=8$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$ 2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x(2+\dfrac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\sqrt{3}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\begin{cases}2 \text{ khi } x\to+\infty\\ -2 \text{ khi } x\to-\infty\end{cases}$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+3x+1}-(4x^2+2)}{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x^4+3x+1-(4x^2+2)^2}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16x^2+3x-3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$$

Suy ra $C=0$.

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^3+7x^2-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$ $(a_0b_0\neq0)$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2})}{x^2(2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}$

* Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

* Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}=0$.

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

* Nếu $m<n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-m}(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}$.

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt[4]{4+\frac{2}{x^4}}}=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x})}=\dfrac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x}}=+\infty$

(do tử $\to+\infty$, mẫu $\to\sqrt[3]{2}$).

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$ 2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$ 4. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$.

Giải

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}-2\right)^7}=-\dfrac{1}{16}$. 2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=2$.

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. 4. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}+1}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}}=-1$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$ 2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$ 4. $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right)=-\infty$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$.

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\dfrac{1}{4}$.

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=M+N$

$M=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\dfrac{1}{3}$

$N=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{1}{2}$

Do đó: $B=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$.

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

Giải

1. Ta có: $\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^2-4(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$=\dfrac{2x\sqrt{x^2+x+1}+1+5x-2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}=\dfrac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}+\dfrac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$=\dfrac{2x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}+\dfrac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$.

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}+$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+5}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2}.$$

2. Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

Nên $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+\dfrac{1}{x})}=-\frac{1}{4}.$$

Bài 7. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$, $(a_0b_0\neq0)$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$

3. $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$ **4.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}$

- Nếu $m=n\Rightarrow A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

- Nếu $m>n\Rightarrow A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

- Nếu $m<n$, ta có:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-m}(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}.$$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+x.\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{x^4}}}=4.$

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}+|x|\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{3}{2}.$

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}}+\dfrac{1}{x}\right)}=+\infty$.

BÀI TOÁN 04: DẠNG VÔ ĐỊNH: $\infty-\infty$ VÀ $0.\infty$

I. PHƯƠNG PHÁP

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x})$.

Giải

Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2}+\sqrt{x^2-2x}=(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)+(\sqrt{x^2-2x}+x)$

$$=\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}+\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1}+\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1}=0.$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn sau: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

Giải

Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=2x\frac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$\Rightarrow B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}=-\frac{1}{4}.$$

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$

3. $C=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x]$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

2. $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-\sqrt{4x^2-x+1})(2x+\sqrt{4x^2-x+1})}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}=\dfrac{1}{4}$.

3. Đặt $y=\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$

$$\Rightarrow y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1})\Rightarrow y-x=\frac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow C=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}}{\dfrac{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}}.$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1+a_2+...+a_n+\dfrac{b_2}{x}+\dfrac{b_3}{x^2}+...+\dfrac{b_n}{x^{n-1}})$

$$=a_1+a_2+...+a_n.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y^kx^{n-1-k}}{x^{n-1}}=1\ \forall k=0,...,n-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}=n.$$

Vậy $C=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$ **2.** $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x)$

3. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2})$

Giải

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=1$.

2. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{(8x^3+2x)}+4x^2}=0$.

3. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-2x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)=0$.

BÀI TOÁN 05: DẠNG VÔ ĐỊNH CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}.\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\dfrac{1}{6}$

Do đó: $A=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{12}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}}{\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}.\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}=1$.

Vậy $B=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x^2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sin x+\cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Giải

1. Ta có: $0\le\left|x^3\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\le x^3$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\sin\dfrac{1}{x^2}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x^2}=0$. Vậy $A=0$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sin x+\cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà: $0\le\left|\dfrac{2\sin x+\cos^2 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|\le\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$. Do đó: $B=0$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm giới hạn sau: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$.

Giải

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{ax}{2}}\right)^2=\dfrac{a}{2}$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$; **2.** $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$.

Giải

1. Ta có: $\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{mx}{2}+2\sin\dfrac{mx}{2}\cos\dfrac{mx}{2}}{2\sin^2\dfrac{nx}{2}+2\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}$

$=\dfrac{m}{n}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}}{\dfrac{mx}{2}}.\dfrac{\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}}.\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}+\cos\dfrac{mx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}+\cos\dfrac{nx}{2}}$

$A=\dfrac{m}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}}{\dfrac{mx}{2}}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}+\cos\dfrac{mx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}+\cos\dfrac{nx}{2}}=\dfrac{m}{n}$.

2. Ta có: $\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$

$=\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x.\cos 2x\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=3.$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{3x}{2}}$

2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin\dfrac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}x(\dfrac{\sin x}{x})^2.\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}=0$.

2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{5x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{-2x\cos\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{5}{2}.\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos\dfrac{7x}{2}}=\dfrac{5}{2}$.

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{1-\cos 2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{2\sin^2 x}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan 2x}{2x})^2.(\dfrac{x}{\sin x})^2(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})$.

$\Rightarrow C=6$.

4. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}}$.

Mà : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$=3\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{3x}.\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin 3x}+1})+2=\dfrac{7}{2}$. Vậy: $D=\dfrac{7}{2}$.

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}.\dfrac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$

2. $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\tan x$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}\quad(\alpha>0)$

4. $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

Giải

1. Ta có:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\sin\pi(1-x^n)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\pi(1-x^m)}.\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x^n)}{\sin\pi(1-x^n)}.\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{(1-x)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1)}=\frac{n}{m}.$$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

3. Ta có: $0\le|x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}|<x^\alpha$. Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha=0$ nên theo nguyên lí kẹp $\Rightarrow C=0$.

4. Trước hết ta có: $\sin x<x\quad\forall x>0$

Ta có: $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=\left|2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$ nên $D=0$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$

2. $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$

4. $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$.

Giải

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)}=-\dfrac{4}{9}$.

2. Ta có: $0\le\dfrac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$. Vậy $B=0$.

3. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$.

4. Ta có: $1-\sqrt[n]{\cos ax}=\dfrac{1-\cos ax}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}$

$$\Rightarrow D=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}=\frac{a}{2}.\frac{1}{n}=\frac{a}{2n}.$$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$ 2. $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

3. $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$

Giải

1. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96.$

2. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^4.\left(\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)^4.\dfrac{16}{81}=\dfrac{16}{81}.$

3. Ta có: $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}$. Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\tan x}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.x.\frac{x}{\tan x}=0.\text{ Do đó: } E=0.$$

CHƯƠNG 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$
  – Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x_0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
  – Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0.
- $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

II. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1. **Định lý 1:**
   a) Hàm số đa thức liên tục trên tập R
   b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng
2. **Định lý 2:** Các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó tổng, hiệu, tích liên tục tại x₀, thương $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục nếu $g(x_0)\neq 0$.
3. **Định lý 3.** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.
   Nếu $f(a)\neq f(b)$ và M là một số nằm giữa $f(a)$,$f(b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=M$
4. **Hệ quả:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.
   Nếu $f(a)\,f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.
   Chú ý: Ta có thể phát biểu hệ quả trên theo cách khác như sau:
   Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a)\,f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

I. PHƯƠNG PHÁP

- Tìm giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$.
3. Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\ne x_0\\ k & \text{khi } x=x_0\end{cases}$ liên tục tại $x=x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.
4. Hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\ge x_0\\ f_2(x) & \text{khi } x< x_0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_2(x)=f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\ne x_0\\ k & \text{khi } x=x_0\end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.
- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x> x_0\\ g(x) & \text{khi } x\le x_0\end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\ne 3\\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3\\ (x-1)^2 & \text{khi } x\ge 3\end{cases}$

Giải

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3)=\dfrac{10}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+2}=\dfrac{27}{5}\ne f(3)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x=3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$;

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra:

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\ne 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$ **2.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\ne -1\\ 1 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

Giải

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(2-x)=3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x=2$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x<2\\ ax^2+x+1 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$

Giải

1. Ta có $f(2)=a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}=\dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right)=4a+3=f(2)$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 4a+3=1 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm chỉ ra :

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\[2mm] \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$ tại $x = 4$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\[2mm] 3x^2+x-1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ tại $x = 1$

Giải

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}=f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Bài 2. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số sau liên tục tại điểm $x = 0$:

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ **2.** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$

Giải

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=1$

Vậy ta chọn $f(0) = 1$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\left(\sqrt[3]{(2x+8)^2}+2.\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}=\dfrac{2}{9}$

Vậy ta chọn $f(0)=\dfrac{2}{9}$.

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\[2mm] 2x+3 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\[2mm] 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\[2mm] x^2-x+3 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Giải

1. Ta có: $f(-1)=1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2x+3\right)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\dfrac{3}{2}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=-1$.

2. Ta có: $f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right)=2=f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}=f(1)$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

4. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}}+2x\right]=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-x+3\right)=5\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0=2$.

Bài 4. Tìm a để các hàm số sau liên tục tại các điểm đã chỉ ra :

1. $f(x)=\begin{cases} x+2a & \text{khi } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ tại $x=0$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\ne 0 \\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ tại $x=1$.

Giải

1. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2a)=2a$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x(ax+2a+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)}=\dfrac{2}{2a+1}$

Hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1}=3 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{6}$.

3. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\dfrac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a(x^2-2)}{x-3}=\dfrac{a}{2}$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{8} \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …

Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$ 2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Giải

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D.

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\ne 2\end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 2. Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x<2 \\ (1-a)x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Với $x<2 \Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x>2 \Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x=2$ ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-a)x=2(1-a)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^-} a^2(\sqrt{x+2}+2)=4a^2$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a^2=2(1-a) \Leftrightarrow a=-1, a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=-1, a=\dfrac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Xác định tính liên tục của hàm số sau trên $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ 2. $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$ 3. $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$

Giải

1. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-2\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2$, $x=3$.

2. TXĐ : $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x)=0=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục trái tại $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x)=0=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục phải tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc D và gián đoạn tại các điểm : $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x<2\\ 2-x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

Giải

1. TXĐ : $D=\mathbb{R}$

- Với $x<2\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>2\Rightarrow f(x)=2-x\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=2$ ta có : $f(2)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)=0$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}=-\frac{1}{24}\ne\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Hàm số không liên tục tại $x=2$.

2. Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

- Với $x<1\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>1\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=1$ ta có : $f(1)=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{2}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}=\frac{2}{3}=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Hàm số liên tục tại $x=1$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Xác định a, b để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } |x|\le\frac{\pi}{2}\\ ax+b & \text{khi } |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\ne 0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$

Giải

1. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}a+b=1\\ -\frac{\pi}{2}a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{\pi}\\ b=0\end{cases}$

2. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$.

Bài 4. Tìm m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Giải

1. Với $x \neq 1$ ta có $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có: $f(1) = 3m - 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left[1 + \frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[1 + \frac{x^2+x+2}{x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}}\right] = 2$$

Nên hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow 3m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$

Vậy $m = \dfrac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

2. - Với $x > 0$ ta có $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$
   - Với $x < 0$ ta có $f(x) = 2x^2 + 3m + 1$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;0)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 0$

Ta có: $f(0) = 3m + 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2x^2 + 3m + 1\right) = 3m + 1$$

Do đó hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow 3m + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{6}$

Vậy $m = -\dfrac{1}{6}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

3. Với $x > 2$ ta có hàm số liên tục.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$ và liên tục tại $x = 2$.

- Hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi tam thức:

$$g(x) = x^2 - 2mx + 3m + 2 \neq 0,\ \forall x \le 2$$

– **Trường hợp 1:** $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 \le 0 \\ g(2) = -m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \le m \le \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

– **Trường hợp 2:** $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m - 2 > 0 \\ x_1 = m - \sqrt{\Delta'} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 2 > 0 \\ m > 2 \\ \Delta' < (m-2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{17}}{2} < m < 6$$

Nên $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \le m < 6$ (*) thì $g(x) \neq 0,\ \forall x \le 2$.

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\sqrt{2x-4} + 3\right) = 3$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} = \frac{3}{6-m}$$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

I. PHƯƠNG PHÁP

- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ $(i=1,2,\dots,k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1}) < 0$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm:

1. $x^5 + 3x + 1 = 0$ 2. $x^3 + 2x = 4 + 3\sqrt{3-2x}$

Giải

1. Xét hàm số $f(x) = x^5 + 3x + 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(-1) = -1, f(0) = 1 \Rightarrow f(-1).f(0) = -1 < 0$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0 \ (1)$$

Do $A=\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên $(1) \Leftrightarrow x_1=x_2$. Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

2. Điều kiện: $x \le \frac{3}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4$ liên tục trên $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$$f(0)=-4-3\sqrt{3}<0,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{8}>0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right)<0$$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm.

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x_1^3-x_2^3\right)+2\left(x_1-x_2\right)-3\left(\sqrt{3-2x_1}-\sqrt{3-2x_2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\underbrace{\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2+\frac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}\right)}_{B}=0 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

(Vì $B=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+2+\frac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}>0$)

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

1. $x^7+3x^5-1=0$ 2. $x^2\sin x+x\cos x+1=0$.

Giải

1. Ta có hàm số $f(x)=x^7+3x^5-1$ liên tục trên R và $f(0).f(1)=-3<0$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

2. Ta có hàm số $f(x)=x^2\sin x+x\cos x+1$ liên tục trên R và $f(0).f(\pi)=-\pi<0$.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5+2x^3+15x^2+14x+2}=3x^2+x+1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^5+2x^3+15x^2+14x+2=\left(3x^2+x+1\right)^2 \Leftrightarrow x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1=0 \quad (1)$$

Hàm số $f(x)=x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2)=-95<0,\ f(-1)=1>0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{19}{32}<0$

$f(0)=1>0,\ f(2)=-47<0,\ f(10)=7921>0$

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng:

$$(-2;-1),\ \left(-1;-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2};0\right),\ (0;2),\ (2;10).$$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt :

1. $x^3-3x+1=0$ 2. $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Giải

1. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-2)=-1$; $f(0)=1$; $f(1)=-1$; $f(2)=3$

$\Rightarrow f(-2).f(0)=-1<0,\ f(0).f(1)=-1<0,\ f(1).f(2)=-3<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng: $(-2;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$.

Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f(x)$ chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3=6\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow (2x-3)^3-216(x-1)=0$

Xét hàm số $f(x)=(2x-3)^3-216(x-1)$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-4)=-251, f(0)=189, f(1)=-1, f(7)=35$

Suy ra $\Rightarrow f(-4).f(0)<0, f(0).f(1)<0, f(1).f(7)<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-4;0),(0;1),(1;7)$.

Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f(x)$ chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

Bài 2. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m(x-1)^3(x+2)+2x+3=0$ 2. $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$

3. $m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)=0 \quad (a \le b \le c \le d)$.

Giải

1. Ta có hàm số $f(x)=m(x-1)^3(x+2)+2x+3$ liên tục trên R và

$f(1).f(-2)=-5<0\Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;1)$.

2. Điều kiện : $x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$, liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\frac{\pi}{2})=-1<0$ do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

$x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x_0\neq k\frac{\pi}{2}$

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

3. Hàm số $f(x)=m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)$ liên tục trên R và

$f(a).f(c)=n^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\leq 0\Rightarrow$ phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài 3. Cho $m>0$ và a,b,c là ba số thực bất kỳ thoả mãn:

$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Giải

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$

- $c=0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x=0$
- $c\neq 0$ ta có $f(0)=c; f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c}{m(m+2)}$

$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right)=\frac{-c^2}{m(m+2)}<0$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình:

1. $x^5-5x^3+4x-1=0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$
2. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$; $a,b,c>0$ có hai nghiệm phân biệt.
3. $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m
4. $m^2.(x-2)+m(x-1)^3.(x-2)^4+3x-4=0$ có nghiệm với mọi m.

Giải

Gọi f(x) là vế trái của các phương trình

1. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)f(-\frac{3}{2})<0$;

$f(-\frac{3}{2})f(-1)<0$; $f(-1).f(\frac{1}{2})<0$; $f(\frac{1}{2})f(1)<0$; $f(1)f(3)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(a)f(b)f(c)=-abc\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x).\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

4. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(2)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Cho các số thực dương m, n, p thỏa mãn: $n<m$; $mp<n^2$ và $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0$.

Chứng minh rằng phương trình: $f(x)=ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Giải

Ta xét $f(\frac{n}{m})=a\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c$.

Mặt khác từ : $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0\Rightarrow\frac{m}{n^2}\left(a.\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c\right)+c(\frac{1}{p}-\frac{m}{n^2})=0$

$\Leftrightarrow\frac{m}{n^2}f(\frac{n}{m})+c.\frac{n^2-pm}{pn^2}=0\Leftrightarrow f(\frac{n}{m})=\frac{pm-n^2}{pm}c=\frac{pm-n^2}{pm}f(0)$.

* Xét $c=0$:

Nếu $a=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó f(x) sẽ có nghiệm trong (0; 1)

Nếu $a\neq 0$, từ giả thiết $\Rightarrow-\frac{b}{a}=\frac{n}{m}<1$ và $f(x)=x(ax+b)=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}\in(0;1)$

* Xét $c \neq 0$, ta có: $f\left(\dfrac{n}{m}\right).f(0) = \dfrac{pm - n^2}{pm} f^2(0) < 0$

$\Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x \in (0;\dfrac{n}{m}) \subset (0;1)$.

Bài 6. 1. Cho hàm số $f:\left[0;1\right] \to \left[0;1\right]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c \in \left[0;1\right]$ sao cho $f\left(c\right) = c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L < 1$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c \geq 0$ sao cho $f(c) = c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ thỏa mãn: $f(3x) = f(x)$.

4. Cho hàm số $f:\left[0;1\right] \to \left[0;1\right]$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn: $f(0) = f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x) - f(x + \dfrac{1}{n}) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$

Giải

1. Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - x$, ta có $y = g(x)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và $g(0)g(1) < 0$ nên tồn tại $c \in \left[0;1\right]: g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

2. • Nếu $f(0) = 0$ thì ta chọn $c = 0$.

   • Nếu $f(0) > 0$.

   Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$, ta có hàm g liên tục trên $[0;+\infty)$ và $g(0) > 0$

   Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L < 1$ nên tồn tại số $a > 0$ sao cho $\dfrac{f(a)}{a} < 1 \Rightarrow g(a) < 0$

   $\Rightarrow g(0).g(a) < 0$ nên tồn tại số thực $c \in \left(0;a\right)$ sao cho $g(c) = 0$ hay là $f(c) = c$.

3. Ta có: $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3}\right) = f\left(\dfrac{x}{3^2}\right) = ... = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$

   Cho $n \to \infty \Rightarrow \dfrac{x}{3^n} \to 0, \forall x$. Suy ra: $f(x) = f(0) = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

   Vậy f là hàm hằng.

4. Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$, ta có g là hàm liên tục trên $\left[0;\dfrac{n-1}{n}\right]$

   Và $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right] = f(1) - f(0) = 0$

   Suy ra tồn tại hai chỉ số $i, j \in \left\{0,1,...,n-1\right\}$ sao cho : $g\left(\dfrac{i}{n}\right).g\left(\dfrac{j}{n}\right) < 0$

   Hay phương trình : $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x + \dfrac{1}{n}) = 0$ có nghiệm trên $\left[0;1\right]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a;b] và n điểm $x_1; x_2; ...; x_n \in \left[a;b\right]$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in \left[a;b\right]$ sao cho $nf(c) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0 < \alpha < \beta < 1$ sao cho $\cos\alpha = \alpha^2$ và $\beta\tan\beta = 1$.

Giải

1. Xét hàm số : $g(x) = nf(x) - f(x_1) - f(x_2) - ... - f(x_n)$ liên tục trên [a ;b].

   Vì f liên tục trên đoạn [a ;b] nên tồn tại giá trị lớn nhất M, nhỏ nhất m do đó tồn tại $\alpha, \beta \in \left[a,b\right]$ sao cho $f(\alpha) = m, f(\beta) = M \Rightarrow g(\alpha).g(\beta) < 0$.

2. Hàm số : $f(x) = \cos x - x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0).f(1) = 1(\cos 1 - 1) < 0$

   Suy ra $\exists \alpha \in \left(0;1\right): f(\alpha) = 0$ hay $\cos\alpha = \alpha^2$

   Mặt khác hàm số $y = \cos x$ là hàm nghịch biến trên $(0;1)$, hàm $y = x^2$ là hàm đồng biến trên $\left(0;1\right)$ nên α là số duy nhất.

   Hàm số $g(x) = x\tan x - 1$ liên tục trên $\left(0;1\right)$ và $f(0).f(1) = -1(\tan 1 - 1) < 0$, đồng thời hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$ nên tồn tại duy nhất số thực $\beta \in (0;1)$ sao cho $\beta\tan\beta - 1 = 0$.

   Vì $\sin x < x \quad \forall x > 0$ nên $g(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - 1 < 0 = f(\beta) \Rightarrow \alpha < \beta$.

CHỦ ĐỀ 5: ĐẠO HÀM

CHƯƠNG 1: KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a;b)$, được gọi là có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$ nếu giới hạn sau tồn tại (hữu hạn): $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ và giá trị của giới hạn đó gọi là giá trị đạo hàm của hàm số tại điểm x_0. Ta kí hiệu $f'(x_0)$.

Vậy $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

II. ĐẠO HÀM BÊN TRÁI, BÊN PHẢI

$f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. $\quad f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Hệ quả: Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow \exists\, f(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

III. ĐẠO HÀM TRÊN KHOẢNG, TRÊN ĐOẠN

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a;b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a;b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

IV. MỐI LIÊN HỆ GIỮA ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC

- **Định lí**: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0.

Chẳng hạn: Xét hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không liên tục tại điểm đó.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$, còn $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

I. PHƯƠNG PHÁP

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x = 2$ $\qquad$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24 \Rightarrow f'(2) = 24$.

2. Ta có : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Ta có $f(0) = 0$, do đó: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\frac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Giải

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{x-1}=1$

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}2=2$

$\Rightarrow f'(-1^+)\neq f'(-1^-)\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

1. $f(x)=2x+1$ tại $x_0=1$ 2. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$

3. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $x_0=2$ 4. $f(x)=\sin^2x$ tại $x=\frac{\pi}{2}$

5. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 \text{ khi } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Giải

1. Ta có: $f'(x_0)=2$ 2. $f'(x_0)=-2$

3. $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt7}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt7)}=\frac{5}{2\sqrt7}$

4. $f'(\frac{\pi}{2})=0$

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac12$

Vậy $f'(1)=\frac12$.

Bài 2. Tính đạo hàm các hàm số sau tại các điểm chỉ ra:

1. $f(x)=x^3$ tại $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

3. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2x}{x} & \text{khi } x>0\\ x+x^2 & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

4. $f(x)=\frac{x^2+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

Giải

1. Ta có: $f(x)-f(1)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3$. Vậy $f'(1)=3$.

2. Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2x+3)=5$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+3x-4)=0$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

3. Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x+x^2\right)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x^2}=1 \text{ và } \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+x^2}{x}=1$$

Vậy $f'(0)=1$.

4. Ta có hàm số liên tục tại $x_0=-1$ và $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$

Nên $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=0$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-1}{x(x+1)}=2$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\neq\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

Nhận xét: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

Bài 3. 1. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x\ge1\\ ax+b & \text{khi } x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

2. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\ge0\\ 2x^2+ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

3. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\ge0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Giải

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+b)=a+b$

Hàm có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow a+b=2$ (1)

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+2)=3$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax-a}{x-1}=a\ (\text{Do } b=2-a)$$

Hàm có đạo hàm tại $x=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$.

2. Ta thấy với $x\neq0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0\Leftrightarrow b=1$.

Khi đó: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$; $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a$

$\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=0$.

Vậy $a=0,b=1$ là những giá trị cần tìm.

3. Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1=f(0)$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow b=1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{x+1}=-1,\ \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}a=a$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=0\Leftrightarrow a=-1$

Vậy $a=-1$, $b=1$ là giá trị cần tìm.

CHƯƠNG 2: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hàm số

- $(u_1\pm u_2\pm\ldots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\ldots\pm u_n'$
- $(k.u(x))'=k.u'(x)$
- $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$
- $(u^n(x))'=nu^{n-1}(x).u'(x)$
- $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
- $\left(\dfrac{c}{u(x)}\right)'=-\dfrac{c.u'(x)}{u^2(x)}$.

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y=f(u(x))=f(u)$ với $u=u(x)$. Khi đó $y'_x=y'_u.u'_x$.

II. BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

Đạo hàm	Hàm hợp
$(c)' = 0$	
$(x)' = 1$	
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Tính đạo hàm bằng công thức

I. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng các quy tắc tính đạo hàm.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ **2.** $y = -x^3 + 3x + 1$

3. $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 1$ **4.** $y = -2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

5. $y = \frac{2x+1}{x-3}$ **6.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$

Giải

1. Ta có: $y' = \left(-x^3 + 3x + 1\right)' = 3x^2 - 6x + 2$

2. Ta có: $y' = \left(-x^3 + 3x + 1\right)' = -3x^2 + 3$

3. Ta có: $y' = \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 1\right)' = x^3 - 2x$

4. Ta có: $y' = \left(-2x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1\right)' = -8x^3 + 3x$

5. Ta có: $y' = \frac{(2x+1)'(x-3) - (x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

6. Ta có: $y' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x+1) - (x^2 - 2x + 2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}.$$

Nhận xét: Với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có: $y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $f'(x) \ge 0$ biết:

1. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ **2.** $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 12}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ **4.** $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

Giải

1. TXĐ: $D = [-2;2]$

Ta có: $f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

Do đó: $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

2. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}} = \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 2x}{\sqrt{x^2 + 12}}$

Suy ra: $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 12} \ge 2x$ (1)

- Với $x < 0$ thì (1) luôn đúng

- Với $x \ge 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + 12 \ge 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

Vậy bất phương trình $f'(x) \ge 0$ có nghiệm $x \le 2$.

3. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)\sqrt{x^2 + x + 1} = (1+2x)\sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)(1+2x) \ge 0 \\ (1-2x)^2\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right] = (1+2x)^2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ (1-2x)^2 = (1+2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

4. TXĐ: $D = [0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} \ge \sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow x^6 \ge (x^2+1)^3$

$\Leftrightarrow x^2 \ge x^2 + 1$ bất phương trình này vô nghiệm.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$
2. $y = \sqrt[5]{\sqrt{2x^2 + 1} + 3x + 2}$
3. $y = \sqrt{2\sin^2(2x-1) + \cos\sqrt{x}}$
4. $y = \tan(\sin^2 3x) + \sqrt{\cot^2(1-2x^3) + 3}$
5. $y = \sqrt[3]{\sin(\tan x) + \cos(\cot x)}$

Giải

1. Ta có: $y' = \dfrac{(2x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}} = \dfrac{4x + 3}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 1}}$.

2. Ta có: $y' = \dfrac{1}{5.\sqrt[5]{(\sqrt{2x^2+1} + 3x + 2)^4}}(\sqrt{2x^2+1} + 3x + 2)'$

$$= \frac{1}{5.\sqrt[5]{(\sqrt{2x^2+1} + 3x + 2)^4}}\left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + 3\right).$$

3. Ta có: $y' = \dfrac{(2\sin^2(2x-1) + \cos\sqrt{x})'}{2\sqrt{2\sin^2(2x-1) + \cos\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sin(4x-2) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{2\sin^2(2x-1) + \cos\sqrt{x}}}$

$$= \frac{4\sqrt{x}\sin(4x-2) - \sin\sqrt{x}}{4\sqrt{2x\sin^2(2x-1) + x\cos\sqrt{x}}}.$$

4. Ta có: $y' = [1 + \tan^2(\sin^2 3x)](\sin^2 3x)' + \dfrac{[\cot^2(1-2x^3) + 3]'}{2\sqrt{\cot^2(1-2x^3) + 3}}$

$$= 3[1 + \tan^2(\sin^2 3x)]\sin 6x + \frac{6x^2[1 + \cot^2(1-2x^3)]\cot(1-2x^3)}{\sqrt{\cot^2(1-2x^3) + 3}}.$$

5. Ta có: $y' = \dfrac{[\sin(\tan x) + \cos(\cot x)]'}{3\sqrt{[\sin(\tan x) + \cos(\cot x)]^2}}$

$$= \frac{(1 + \tan^2 x)\cos(\tan x) + (1 + \cot^2 x)\sin(\cot x)}{3\sqrt{[\sin(\tan x) + \cos(\cot x)]^2}}.$$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{2x} & \text{khi } x \ne 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Giải

1. Với $x > 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3$

Với $x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2$

Với $x = 1$ ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}\left(x^2 - 3x + 1\right) = -1 \ne f(1) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x = 1$, suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x > 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

2. Với $x \ne 0 \Rightarrow f(x) = x^2\cos\dfrac{1}{2x} \Rightarrow f'(x) = 2x\cos\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2x}$

Với $x = 0$ ta có: $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{2x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Vậy $f'(x) = \begin{cases} \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{1}{2x} & \text{khi } x \ne 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ 2. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

3. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $ac \neq 0$ 4. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$, $aa' \neq 0$.

Giải

1. Ta có: $y' = 4x^3 - 6x + 2$.

2. Ta có $y' = \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

3. Ta có $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

4. Ta có: $y' = \dfrac{(2ax + b)(a'x + b') - a'(ax^2 + bx + c)}{(a'x + b')^2} = \dfrac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$ 2. $y = \dfrac{3}{(2x+5)^2}$

3. $y = \sqrt{3x + 2\tan x}$ 4. $y = \sin^2(3x + 1)$

Giải

1. Ta có: $y' = x'\sqrt{x^2 + 1} + \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'x = \sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}.x$

$$= \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. Ta có: $y' = -\dfrac{3\left[(2x+5)^2\right]'}{(2x+5)^4} = -\dfrac{12(2x+5)}{(2x+5)^4} = -\dfrac{12}{(2x+5)^3}$.

3. Ta có: $y' = \dfrac{(3x + 2\tan x)'}{2\sqrt{3x + 2\tan x}} = \dfrac{3 + 2(1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{3x + 2\tan x}} = \dfrac{5 + 2\tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2\tan x}}$

4. Ta có: $y' = 2\sin(3x+1).\left[\sin(3x+1)\right]' = 2\sin(3x+1).3\cos(3x+1) = 3\sin(6x+2)$.

Bài 3. Tính đạo hàm các hàm số sau :

1. $y = x^2(2x+1)(5x-3)$ 2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 3. $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

4. $y = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} + \dfrac{4}{3}\cot x$ 5. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Giải

1. Ta có: $y = 10x^4 - x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$

2. Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{(a^2 - x^2)} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

3. Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{1 - x} - \dfrac{1 + x}{2\sqrt{1 - x}}}{1 - x} = \dfrac{1 - 3x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$

4. Ta có: $y = -\dfrac{1}{3}\cot x(1 + \cot^2 x) + \dfrac{4}{3}\cot x = -\dfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x$

$\Rightarrow y' = \cot^2 x(1 + \cot^2 x) - 1 - \cot^2 x = \cot^4 x - 1.$

5. Với $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}$

Với $x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$.

Bài 4. Tính $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)}$. Biết rằng: $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

Giải

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2; \varphi'(x) = 4 + \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(0) = 4 + \dfrac{\pi}{2}$

Suy ra $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(0)} = \dfrac{4}{8 + \pi}$.

Bài 5. Chứng minh rằng hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x:

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x.$$

Giải

Ta có: $y=2+\frac{1}{2}[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)]-2\sin^2 x$

$y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-\cos 2x-\cos 2x)-2\sin^2 x=1\Rightarrow y'=0.$

Bài 6. Tìm m để các hàm số:

1. $y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1$ có $y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

2. $y=\frac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$ có $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Giải

1. Ta có: $y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$

Do đó $y'\ge 0\Leftrightarrow (m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\ge 0 \quad (1)$

- $m=1$ thì (1) $\Leftrightarrow -6x-6\ge 0\Leftrightarrow x\le -1$ nên $m=1$ (loại)
- $m\ne 1$ thì (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-1>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1\\ (m+1)(4-m)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 4$. Vậy $m\ge 4$ là những giá trị cần tìm.

2. Ta có: $y'=mx^2-2mx+3m-1$

Nên $y'\le 0\Leftrightarrow mx^2-2mx+3m-1\le 0 \quad (2)$

- $m=0$ thì (1) trở thành: $-1\le 0$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$
- $m\ne 0$, khi đó (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a=m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0\\ m(1-2m)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0\\ 1-2m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m<0$. Vậy $m\le 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$; 2. $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x\le 1\\ \sqrt{x-1}+3 & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Giải

1. Với $x\ne 0$ ta có: $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

Tại $x=0$ ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

2. Với $x<1$ ta có: $f'(x)=2x+1$

Với $x>1$ ta có: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Tại $x=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Bài 8. Tìm a,b để hàm số sau có đạo hàm trên $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & \text{khi } x\le 1\\ -x^2+ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Giải

Với $x\ne 1$ thì hàm số luôn có đạo hàm.

Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a+b-1$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow a+b-1=1\Leftrightarrow a+b=2$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-x^2+ax+1-a}{x-1}=a-2$

Nên hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a+b=2\\ a-2=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=3\\ b=-1\end{cases}$.

Bài 9. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y=(x^2-1)(3x^3+2x)$ 2. $y=\frac{\sin 2x}{x}-\frac{x}{\cos 3x}$

3. $y=x\tan 2x+\frac{x+1}{\cot x}$ 4. $y=\sqrt{\sin^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1}$.

Giải

1. Ta có: $y' = 2x(3x^3+2x)+(x^2-1)(9x^2+2) = 15x^4-3x^2-2$.

2. Ta có: $\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)' = \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$, $\left(\dfrac{x}{\cos 3x}\right)' = \dfrac{\cos 3x + 3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$

Nên $y' = \dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2} - \dfrac{\cos 3x + 3x\sin 3x}{\cos^2 3x}$.

3. Ta có: $\left(x\tan 2x\right)' = \tan 2x + 2x\left(1+\tan^2 2x\right)$

$\left(\dfrac{x+1}{\cot x}\right)' = \left[(x+1)\tan x\right]' = \tan x + (x+1)(\tan^2 x+1)$

Nên $y' = \tan 2x + 2x\left(1+\tan^2 2x\right) + \tan x + (x+1)(\tan^2 x+1)$.

4. Ta có: $y' = \dfrac{3\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{\sin^3\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1}}$.

Bài 10. Giải bất phương trình:

1. $f'(x) \ge 0$ với $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f'(x) < 0$ với $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$
3. $2xf'(x) - f(x) \ge 0$ với $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$
4. $f'(x) > 0$ với $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Giải

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6x$, suy ra $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$.

2. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = -8x^3 + 8x$, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

3. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Mặt khác: $f(x) > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $2xf'(x) - f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2xf(x)}{\sqrt{x^2+1}} - f(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4. TXĐ: $D = \left[-2;2\right]$

Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} > x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < 0 \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ 4-x^2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < 0 \\ 0 \le x < \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le x < \sqrt{2}.$$

Vấn đề 2. Sử dụng đạo hàm để tìm giới hạn

I. PHƯƠNG PHÁP

Từ định nghĩa đạo hàm $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ta thấy có thể sử dụng đạo hàm để tìm giới hạn của hàm số. Cụ thể:

- Để tính $A = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}$, biết $g(x_0) = 0$.

Ta viết $g(x) = f(x) - f(x_0)$. Khi đó nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì:

$$A = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

- Để tính: $B = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)}{G(x)}$, biết $F(x_0) = G(x_0) = 0$.

Ta viết $F(x) = f(x) - f(x_0)$ và $G(x) = g(x) - g(x_0)$.

Nếu hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ và $g'(x_0) \ne 0$ thì:

$$B = \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$
2. $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2-1}$
3. $C = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+3x}-1}{x}$
4. $D = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

Giải

1. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ và $f(0)=1$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-\frac{1}{3}.$$

2. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{3x-2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3.\sqrt[3]{(2x-1)^2}}-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\text{ và } f(1)=0.$$

$$\Rightarrow B=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}.\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}.\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\frac{1}{2}.f'(1)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{9}.$$

3. Đặt $f(x)=\sqrt[n]{1+3x}\Rightarrow C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\dfrac{3}{n}$.

4. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{3.\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}+\dfrac{1}{2.\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$

$$\Rightarrow D=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}.\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn sau : $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}{1-\cos x}$

Giải

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt[3]{1+3x^2}}{x^2}}{\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t}=0$. Vậy $A=0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$ 2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ $(m,n\in\mathbb{N};a.b\neq 0)$ 4. $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$

Giải

1 Xét hàm số $f(x)=(1+3x)^3-(1-4x)^4\Rightarrow A=f'(0)=25$

2. Xét hàm số $f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)-1\Rightarrow B=f'(0)=6$

3. Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt[n]{1+ax}-1,g(x)=\sqrt[m]{1+bx}-1\Rightarrow C=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=\dfrac{ma}{nb}$.

4. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}-x\Rightarrow D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}.f'(1)=0$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{1-\sqrt{2-x^2}}$ 2. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

3. $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{26x^3+1}-\sqrt[4]{80x^4+1}}{\sqrt{x}-1}$ 4. $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$.

Giải

1. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-1\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3.\sqrt[3]{(2x-1)^2}}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{2}{3}$

và $g(x)=1-\sqrt{2-x^2}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}\Rightarrow g'(1)=1$.

Khi đó: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=\dfrac{2}{3}$.

2. Đặt $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{2x}{3.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

$\Rightarrow f'(0)=1$. Và $g(x)=\sin x\Rightarrow g'(x)=\cos x\Rightarrow g'(0)=1$.

Khi đó: $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=1$.

3. Đặt $g(x)=\sqrt{x}-1\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=\dfrac{1}{2}$ và

$$f(x)=\sqrt[3]{26x^3+1}-\sqrt[4]{80x^4+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{26x^2}{\sqrt[3]{(26x^3+1)^2}}-\frac{80x^3}{\sqrt[4]{(80x^4+1)^3}}\Rightarrow f'(1)=\frac{-2}{27}$$

Khi đó: $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=-\dfrac{4}{27}$.

4. Xét hai hàm số: $f(x)=\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}$

$$g(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$$

Ta có: $E=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$.

Vấn đề 3. Đạo hàm cấp cao và vi phân

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Vi phân của hàm số

- Tích $f'(x_0).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) được kí hiệu là $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.
- Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân hàm số $y=f(x)$, kí hiệu là: $df(x)=f'(x)\Delta x$.

Đặc biệt: $dx=x'\Delta x=\Delta x$ nên ta viết $df(x)=f'(x)dx$.

2. Đạo hàm cấp n

- ***Đạo hàm cấp hai:*** Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của f và được kí hiệu là: f'', tức là: $f''=(f')'$.
- ***Đạo hàm cấp n:*** Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n-1$ (với $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của f và được kí hiệu là $f^{(n)}$, tức là: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau: $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

Giải

Ta có: $y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2}$, $y''=\dfrac{7.2}{(x-2)^3}$, $y'''=\dfrac{-7.2.3}{(x-2)^4}$

Bằng quy nạp ta chứng minh: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}}$ (2)

- Với $n=1$ ta thấy (2) đúng.
- Giả sử (2) đúng với $n=k$, tức là: $y^{(k)}=\dfrac{(-1)^k.7.k!}{(x-2)^{k+1}}$

Ta có: $y^{(k+1)}=\left(\dfrac{(-1)^k.7.k!}{(x-2)^{k+1}}\right)'=-\dfrac{(-1)^k.7.k!.(k+1)}{(x-2)^{k+2}}=\dfrac{(-1)^{k+1}.7.(k+1)!}{(x-2)^{k+2}}$

Nên (2) đúng với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 2. Cho đa thức $f(x)=x^3-5x^2+1$. Viết f(x) dưới dạng lũy thừa của $x-2$.

Giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3+\dfrac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\dfrac{f'(2)}{1!}(x-2)+f(2)$

Mà $f'(x)=3x^2-10x, f''(x)=6x-10, f'''(x)=6$

Nên $f(x)=(x-2)^3+(x-2)^2-8(x-2)-11$.

Ví dụ 3. Tìm vi phân của của hàm số:

1. $y=x^4-2x+1$
2. $y=(x^3+2)(x+1)$
3. $y=\dfrac{2x^2-6x+5}{2x+4}$
4. $y=\sin 3x\cos 5x$
5. $y=\sqrt{4x^2+\tan x}$

Giải

1. Ta có $dy=(x^4-2x+1)'dx=(4x^3-2)dx$.
2. Ta có $y=x^4+x^3+2x+1\Rightarrow dy=(4x^3+3x^2+2)dx$.
3. Ta có $y'=\dfrac{(4x-6)(2x+4)-2(2x^2-6x+5)}{(2x+4)^2}=\dfrac{4x^2+16x-34}{(2x+4)^2}$.

   Suy ra $dy=\dfrac{4x^2+16x-34}{(2x+4)^2}dx$.
4. Ta có $y=\dfrac{1}{2}\sin 8x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow dy=\left(4\cos 8x-\cos 2x\right)dx$.
5. Ta có: $y'=\dfrac{8x+1+\tan^2 x}{2\sqrt{4x^2+\tan x}}\Rightarrow dy=\dfrac{8x+1+\tan^2 x}{2\sqrt{4x^2+\tan x}}dx$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = \sin 2x$:

1. Tính y'' **2.** Tính $y'''(\frac{\pi}{3})$, $y^{(4)}(\frac{\pi}{4})$ **3.** Tính $y^{(n)}$.

Giải

1. Ta có $y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x$.

2. Ta có $y''' = -8\cos 2x$, $y^{(4)} = 16\sin 2x$

Suy ra $y'''(\frac{\pi}{3}) = -8\cos\frac{2\pi}{3} = 4$; $y^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 16\sin\frac{\pi}{2} = 16$.

3. Ta có $y' = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}), y'' = 2^2\sin(2x + 2\frac{\pi}{2})$, $y''' = 2^3\sin(2x + 3\frac{\pi}{2})$

Bằng quy nạp ta chứng minh $y^{(n)} = 2^n\sin(2x + n\frac{\pi}{2})$

Với $n = 1 \Rightarrow y' = 2^1\sin(2x + \frac{\pi}{2})$ đúng

Giả sử $y^{(k)} = 2^k\sin(2x + k\frac{\pi}{2})$,

suy ra $y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = 2^{k+1}\cos(2x + k\frac{\pi}{2}) = 2^{k+1}\sin\left(2x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

1. $y = \frac{2x+1}{x+2}$ **2.** $y = \frac{1}{ax+b}, a \neq 0$ **3.** $y = \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6}$

4. $y = \cos 2x$ **5.** $y = \sqrt{2x+1}$

Giải

1. Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}, y'' = -\frac{3\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4} = \frac{-3.2}{(x+2)^3}$

$y''' = \frac{3.2.3}{(x+2)^4}$. Ta chứng minh $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.3.n!}{(x+2)^{n+1}}$

- Với $n = 1 \Rightarrow y' = \frac{(-1)^0.3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ đúng
- Giả sử $y^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}.3.k!}{(x+2)^{k+1}}$

$$\Rightarrow y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = -\frac{(-1)^{k-1}.3.k!.\left[(x+2)^{k+1}\right]'}{(x+2)^{2k+2}} = \frac{(-1)^k.3.(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}$$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có $y' = \frac{-a}{(ax+b)^2}, y'' = \frac{a^2.2}{(ax+b)^3}, y''' = \frac{-a^3.2.3}{(ax+b)^4}$

Ta chứng minh: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

- Với $n = 1 \Rightarrow y' = \frac{(-1)^1.a^1.1!}{(ax+b)^2} = -\frac{a}{(ax+b)^2}$ đúng
- Giả sử $y^{(k)} = \frac{(-1)^k.a^k.k!}{(ax+b)^{k+1}}$

$$\Rightarrow y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = -\frac{(-1)^k.a^k.k!.\left[(ax+b)^{k+1}\right]'}{(ax+b)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}.a^{k+1}.(k+1)!}{(x+2)^{k+2}}$$

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có: $2x + 1 = 7(x-2) - 5(x-3)$; $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Suy ra $y = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2}$. Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x-2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}, \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

4. Ta có $y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = 2^2\cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, $y''' = 2^3\cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Bài 3. Cho đa thức bậc n : $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

1. Tính $f^{(k)}(x)$, $1 \le k \le n$;

2. Chứng minh rằng $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ với $k = \overline{0,n}$.

Giải

1. Ta có $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+a_1$

$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+...+2.1.a_2$

……………………………………………………

$f^{(k)}(x)=n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}+...+k(k-1)...1.a_k$ với $k=\overline{1,n}$.

2. Ta có: $f^{(k)}(0)=k.(k-1)...1.a_k=k!.a_k\Rightarrow a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Bài 4. Tìm vi phân của các hàm số sau :

1. $y=x^3+2x^2$ 2. $y=\sqrt{3x+2}$ 3. $y=\sin 2x+\sin^3 x$

4. $y=\tan 2x$ 5. $y=\sqrt[3]{x+1}$ 6. $y=(3x+1)^{10}$

Giải

1. $dy=(3x^2+4x)dx$. 2. $dy=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}}dx$.

3. $dy=\left(2\cos 2x+3\sin^2 x\cos x\right)dx$. 4. $dy=2(1+\tan^2 2x)dx$.

5. $dy=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$. 6. $dy=30(3x+1)^9dx$.

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

1. $y^2.y''-xy'+y=0$ với $y=\sqrt{1-x^2}$

2. $xy''-2y'+4xy+2\sin 2x=0$ với $y=x\sin 2x$.

Giải

1. Ta có: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y''=\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Do đó: $y^2.y''-xy'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=-y$ nên $y^2.y''-xy'+y=0$.

2. Ta có: $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$; $y''=4\cos 2x-4x\sin 2x$

Suy ra: $2y'-xy''=2\sin 2x+4x^2\sin 2x=2\sin 2x+4xy$

Do đó: $xy''-2y'+4xy+2\sin 2x=0$.

Bài 6. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$; 2. $y=\cos 2x$.

Giải

1. Ta có: $x=3(x+2)-2(x+3)$; $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Suy ra $y=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x+2}$.

Mà $\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.1^n.n!}{(x+2)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$, $\left(\dfrac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+3)^{n+1}}$

Nên ta có: $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

2. Ta có: $y'=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''=2^2\cos\left(2x+2\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'''=2^3\cos\left(2x+3\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài 7. 1. Cho đa thức $P(x)$ bậc 3 và có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{P'(x_1)}+\dfrac{1}{P'(x_2)}+\dfrac{1}{P'(x_3)}=0$.

2. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$. Với $\forall x,y\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2011$. Tính $f(2011)=?$

Giải

1. Ta có: $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Khi đó: $P'(x)=(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)$

Do đó: $P'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)$, $P'(x_2)=(x_2-x_1)(x_2-x_3)$

$P'(x_3)=(x_3-x_1)(x_3-x_2)$.

Do đó: $\dfrac{1}{P'(x_1)}+\dfrac{1}{P'(x_2)}+\dfrac{1}{P'(x_3)}=\dfrac{x_3-x_2+x_1-x_3+x_2-x_1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=0$.

2. Với mọi $x_0\in\mathbb{R}$ ta có: $|f(x)-f(x_0)|\le(x-x_0)^2$

Suy ra: $\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\le|x-x_0|$

Do đó: $0\le\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$

Nên $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,\ \forall x_0\in\mathbb{R}$

Vậy $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$, mà $f(2011)=f(1)=2011$.

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

• *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \qquad (y_0 = f(x_0))$$

• Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 là hệ phương trình $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$ có nghiệm x_0. Nghiệm của hệ là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

• Nếu $(C_1): y = px + q$ và $(C_2): y = ax^2 + bx + c$ thì:

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau ⇔ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

* ***Các dạng tiếp tuyến của đồ thị hàm số thường gặp***

– Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, hoặc hoành độ x_0, hoặc tung độ y_0.

– Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ cho trước.

– Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc của nó.

* ***Phương pháp:***

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $M(x_0;y_0)$ là điểm trên (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(x_0;y_0)$ có:

– Hệ số góc: $k = f'(x_0)$

– Phương trình: $y - y_0 = k(x - x_0)$, hay $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Vậy, để viết được phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ chúng ta cần đủ ba yếu tố sau:

– Hoành độ tiếp điểm: x_0

– Tung độ tiếp điểm: y_0 (Nếu đề chưa cho, ta phải tính bằng cách thay x_0 vào hàm số $y_0 = f(x_0)$)

– Hệ số góc $k = f'(x_0)$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết tiếp điểm

I. PHƯƠNG PHÁP

1. **Bài toán 1:** Hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại $M(x_0;y_0)$.Khi điểm $M \in (C) \cap (C')$ và tiếp tuyến tại M của (C) trùng với tiếp tuyến tại M của (C′) chỉ khi hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Lưu ý : Mệnh đề sau đây không đúng cho mọi trường hợp:

$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (d): y = ax + b \end{cases}$ tiếp xúc nhau $\Rightarrow f(x) - ax - b = 0$ có nghiệm kép.

Hàm $f(x)$ nhận x_0 làm nghiệm bội k nếu $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ và $f^k(x_0) \neq 0$. Nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2 chứ **không phải nghiệm kép**.

Phép biến đổi tương đương của phương trình nói chung không bảo toàn số bội của nghiệm.

Ví dụ 1. Đường cong $y = \sqrt{x}$ không tiếp xúc với trục hoành tại 0, tức là phương trình $\sqrt{x} = 0$ không nhận 0 làm nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2.

Khi đó đồ thị $(C): y = x^3$ của hàm số tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$ nhưng phương trình $x^3 = 0$ nhận 0 làm nghiệm bội 3 .

Ví dụ 2. Đồ thị $(C): y = \sin x$ của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $(d): y = x$ tại $x = 0$ nhưng phương trình $\sin x - x = 0$ thì không thể có nghiệm kép.

Như vậy, biến đổi tương đương của phương trình chỉ bảo toàn tập nghiệm, chứ không chắc bảo toàn số bội các nghiệm. Đây cũng là sai lầm dễ mắc phải khi giải quyết bài toán tiếp tuyến.

2. **Bài toán 2:**

* Đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0. Trong trường hợp (C) có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì tiếp tuyến đó có hệ số góc $f'(x_0)$.

* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$ có dạng : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3. **Bài toán 3:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Giải

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0.$$

4. **Bài toán 4:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x=x_0$.

Giải

Tính $y_0=f(x_0), y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

5. **Bài toán 5:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Giải phương trình $f(x)=y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0)$ và thay vào phương trình (1).

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

1. Tại điểm $M(-1;3)$; 2. Tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

3. Tại điểm có tung độ bằng 1 ; 4. Tại giao điểm (C) với trục tung ;

5. Có hệ số góc là 9 ;

6. Song song với đường thẳng (d): $27x-3y+5=0$;

7. Vuông góc với đường thẳng (d') : $x+9y+2013=0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2+6x$

1. Phương trình tiếp tuyến (t) tại $M(-1;3)$ có phương trình : $y=y'(-1)(x+1)+3$

Ta có: $y'(-1)=-3$, khi đó phương trình (t) là: $y=-3x+6$

__Chú ý:__ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

2. Thay $x=2$ vào đồ thị của (C) ta được $y=21$.

Tương tự câu 1, phương trình (t) là: $y=24x-27$.

__Chú ý:__ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x=x_0$, $y_0=f(x_0)$, $y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

3. Thay $y=1$ vào đồ thị của (C) ta được $x^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-3$.

Tương tự câu 1, phương trình (t) là: $y=1$, $y=9x+28$

__Chú ý:__ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Giải phương trình $f(x)=y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

4. Trục tung Oy : $x=0 \Rightarrow y=1$. Tương tự câu 1, phương trình (t) là: $y=1$

5. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Ta có : $y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$, theo giả thiết $y'(x_0)=9$, tức là $3x_0^2+6x_0=9$ $\Rightarrow x_0=-3$ hoặc $x_0=1$. Tương tự câu 1.

6. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t) /\!/ (d): y=9x+\frac{5}{3} \Rightarrow y'(x_0)=9$. Tương tự câu 1.

7. Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (t).

Theo bài toán: $(t) \perp (d'): y=-\frac{1}{9}x-\frac{2013}{9} \Rightarrow y'(x_0)=9$. Tương tự câu 1.

Ví dụ 2 . 1. Cho hàm số: $y=x^3-(m-1)x^2+(3m+1)x+m-2$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

2. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+3)x-3$ và (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\frac{7}{\sqrt{17}}$.

Giải

1. Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m-1)x+3m+1$

Với $x=1 \Rightarrow y(1)=3m+1 \Rightarrow y'(1)=m+6$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có $x = 1$: $y = (m+6)(x-1) + 3m + 1$

Tiếp tuyến này đi qua $A(2;-1)$ nên có: $-1 = m + 6 + 3m + 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy, $m = -2$ là giá trị cần tìm.

2. Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m + 3$.

Phương trình tiếp tuyến (d) : $y = y'(2)(x-2) + y(2)$

$$y = (11-7m)(x-2) + 7 - 6m = (11-7m)x + 8m - 15 \Leftrightarrow (11-7m)x - y + 8m - 15 = 0$$

$$d(0,(d)) = \frac{|8m-15|}{\sqrt{(11-7m)^2+1}} = \frac{7}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 17(8m-15)^2 = 49[(11-7m)^2+1]$$

$$\Leftrightarrow 1313m^2 - 3466m + 2153 = 0 \Leftrightarrow m = 1,\ m = \frac{2153}{1313}.$$

Ví dụ 3. 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Giải

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Gọi (t) là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số và (t) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$, nên đường thẳng (t) có hệ số góc bằng -6.

* **Cách 1:** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (t) và đồ thị (C) của hàm số. Khi đó, ta có phương trình: $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0^2 + 2x_0 + 3) = 0\ (*)$. Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 3 > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

nên phương trình $(*) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 4 \Rightarrow M(1;4)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -6(x-1) + 4 = -6x + 10$.

* **Cách 2:** Phương trình (t) có dạng: $y = -6x + m$

(t) tiếp xúc (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0

$$\begin{cases} -x_0^4 - x_0^2 + 6 = -6x_0 + m \\ -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 10 \end{cases}.$$

---

2. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 1$

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}$,

Tiếp tuyến Δ tại điểm M có hệ số góc: $y'(x_0) = x_0^2 - 1$

Đường thẳng d: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $k_2 = -\frac{1}{3}$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3} \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 điểm $M(-2;0)$, $\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4. 1. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+2}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(-1;-2)$ và $B(1;0)$.

2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cách đều hai điểm $A(2;7)$ và $B(-2;7)$.

Giải

1. * **Cách 1:** Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) và (C)).

$$= -\frac{5}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \frac{3 - x_0}{x_0 + 2} = -\frac{5}{(x_0+2)^2}x + \frac{(-x_0^2 + 6x_0 + 6)}{(x_0+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5x + (x_0+2)^2y + x_0^2 - 6x_0 - 6 = 0$$

$$d(A,(d)) = d(B,(d)) \Leftrightarrow \frac{\left|-5 - 2(x_0+2)^2 + x_0^2 - 6x_0 - 6\right|}{\sqrt{25 + (x_0+2)^4}} = \frac{\left|5 + x_0^2 - 6x_0 - 6\right|}{\sqrt{25 + (x_0+2)^4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|x_0^2 + 14x_0 + 19\right| = \left|x_0^2 - 6x_0 - 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 + 14x_0 + 19 = x_0^2 - 6x_0 - 1 \\ x_0^2 + 14x_0 + 19 = -x_0^2 + 6x_0 + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0^2 + 4x_0 + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Vậy phương trình (d): $y = -5x - 1$.

* **Cách 2:** Tiếp tuyến (d) cách đều hai điểm A, B suy ra hoặc (d) song song với đường thẳng AB hoặc (d) đi qua trung điểm I(0; – 1) của đoạn AB.

– **Trường hợp 1**: (d) //AB.

Hệ số góc của đường thẳng AB: $k_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=1$.

(d) // AB suy ra hệ số góc của (d) : $f'\left(x_0\right)=1\Rightarrow-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}=1\ (*)$. Phương trình (*) vô nghiệm do đó trường hợp này không xảy ra.

– **Trường hợp 2**: (d) qua trung điểm I của đoạn AB.

Phương trình (d) có dạng y = kx – 1.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3-x_0}{x_0+2}=kx_0-1\ (2)\\-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}=k\ (3)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay $k=-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}$ vào (2) ta được: $\dfrac{3-x_0}{x_0+2}=-\dfrac{5}{(x_0+2)^2}-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq-2\\(3-x_0)(x_0+2)=-5-(x_0+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq-2\\x_0=-1\end{cases}\Leftrightarrow x_0=-1$$

Thay $x_0=-1$ vào (2) ta được $k=-5$. Vậy phương trình (d): $y=-5x-1$.

2. Phương trình tiếp tuyến (D) có dạng :

$$y=(3x_0^2-12x_0+9)(x-x_0)+x_0^3-6x_0^2+9x_0-1=(3x_0^2-12x_0+9)x-2x_0^3+6x_0^2-1$$

$$\Leftrightarrow(3x_0^2-12x_0+9)x-y-2x_0^3+6x_0^2-1=0\ (*)$$

$$d(A,(D))=d(B,(D))$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}=\frac{\left|-2(3x_0^2-12x_0+9)-7-2x_0^3+6x_0^2-1\right|}{\sqrt{(3x_0^2-12x_0+9)^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow\left|-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10\right|=\left|-2x_0^3+24x_0-26\right|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=-2x_0^3+24x_0-26\ \ (1)\\-2x_0^3+12x_0^2-24x_0+10=2x_0^3-24x_0+26\ \ (2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12x_0^2-48x_0+36=0\\4x_0^3-12x_0^2+16=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\vee x_0=1\\x_0=-1\vee x_0=2\end{array}\right.$$

Lần lượt thay $x_0=3\vee x_0=1\vee x_0=-1\vee x_0=2$ vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến (D) là $y+1=0$, $y-3=0$, $y=24x+7$, $y=-3x+7$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C):

1. $y=x^3-3x^2+2$, biết d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa mãn: $OB=9OA$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x-2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Giải

1. Gọi $M\left(x_0;y\left(x_0\right)\right)$ là toạ độ tiếp điểm.

Theo bài toán, đường thẳng d chính là đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt A, B. Gọi β là góc tạo bởi giữa d và Ox, do đó d có hệ số góc $k=\pm\tan\beta$

Dễ thấy, tam giác AOB vuông tại O, suy ra $\tan\beta=\dfrac{OB}{OA}=9$

Nói khác hơn đường thẳng d có hệ số góc là ±9, nghĩa là ta luôn có:

$$\left[\begin{array}{l}y'\left(x_0\right)=9\\y'\left(x_0\right)=-9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0^2-6x_0-9=0\\3x_0^2-6x_0+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow x_0=-1\text{ hoặc }x_0=3$$

vì $x_0^2-2x_0+3>0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Với $x_0=-1$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x+7$

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến $y=9x-25$

Vậy, có 2 tiếp tuyến $y=9x+7$, $y=9x-25$ thỏa mãn đề bài .

2. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A\left(1;2\right)$, $B\left(3;-2\right)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là AB: $2x+y-4=0$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm. Khi đó $y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2$

Ta có: $AB=2\sqrt{5}$, $d\left(M;AB\right)=\dfrac{\left|2x_0+y_0-4\right|}{\sqrt{5}}$

Giả thiết $S_{MAB}=6\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.AB.d\left(M;AB\right)=6\Leftrightarrow\left|2x_0+y_0-4\right|=6$

$\Leftrightarrow 2x_0+y_0=10$ hoặc $2x_0+y_0=-2$

* **Trường hợp 1**: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x_0+y_0=-2\\y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-2-2x_0\\x_0\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-2\\x_0=0\end{cases}\text{ hay }M\left(0;-2\right)$$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-2$.

* **Trường hợp 2:** Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}2x_0+y_0=10\\ y_0=x_0^3-6x_0^2+9x_0-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y_0=10-2x_0\\ (x_0-4)\left(x_0^2-6x_0+11\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_0=2\\ x_0=4\end{cases}$ hay $M(4;2)$

Tiếp tuyến tại M là: $y=9x-34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=9x-2$ và $y=9x-34$.

Ví dụ 6. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+3}$.

1. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách đến trục hoành độ bằng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

2. Gọi (d) là một tiếp tuyến của (C), (d) cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại A, cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại B và gọi I là tâm đối xứng của (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) biết:

i) $IA=4IB$.　　　ii) $IA+IB$ nhỏ nhất.

Giải

1. Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng 5 $\Leftrightarrow y_M=\pm5$.

* **Trường hợp 1:** $\begin{cases}M\in(C)\\ y_M=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=-5\\ -5=\frac{x_M-1}{x_M+3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-\frac{7}{3}\\ y_M=-5\end{cases}$

* **Trường hợp 2:** $\begin{cases}M\in(C)\\ y_M=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_M=5\\ 5=\frac{x_M-1}{x_M+3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-4\\ y_M=5\end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(-\frac{7}{3};-5\right)$ là $y=9x+16$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-4;5)$ là $y=4x+21$.

2. i) Ta có $\widehat{ABI}$ bằng góc hình học hợp bởi tiếp tuyến (d) với trục hoành suy ra hệ số góc của (d) là $k\pm\tan\widehat{ABI}=\pm\frac{IA}{IB}=\pm4$

Phương trình tiếp tuyến $(d): y=4x+5$ hoặc $y=4x+21$.

ii) Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$y=\frac{4}{(x_0+3)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{x_0+3}=\frac{4}{(x_0+3)^2}x+\frac{x_0^2-2x_0-3}{(x_0+3)^2}.$$

Tiệm cận đứng của (C): $(D_1): x=-3$

Tiệm cận ngang của (C): $(D_2): y=1$.

A là giao điểm của (d) và (D_1) $\Rightarrow y_A=\frac{x_0^2-2x_0-15}{(x_0+3)^2}$

B là giao điểm của (C) với (D_2) $\Rightarrow x_B=2x_0+3$.

$$IA+IB=|y_A-y_I|+|x_B-x_I|=\left|\frac{x_0^2-2x_0-15}{(x_0+3)^2}-1\right|+|2x_0+6|=\left|\frac{8}{x_0+3}\right|+|2x_0+6|$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có: $IA+IB\ge2\sqrt{\left|\frac{8}{x_0+3}\right||2x_0+6|}=8$.

$$IA+IB=8\Leftrightarrow\left|\frac{8}{x_0+3}\right|=|2x_0+6|\Leftrightarrow(x_0+3)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=-5\end{array}\right.$$

$\min(IA+IB)=8\Rightarrow d: y=x,\ y=x+8$.

Ví dụ 7. 1. Biết rằng trên đồ thị $y=x^3-(m+1)x^2+(4m+2)x+1$, (C_m) tồn tại đúng 1 điểm mà từ đó kẻ được tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+10y+2013=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó.

2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x+3}{x+1}$ tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ bằng 2.

Giải

1. Gọi tiếp điểm là $M(a;b)$, tiếp tuyến tại M có hệ số góc là:

$k=y'(a)=3a^2-2(m+1)a+4m+2$, theo giả thiết suy ra $k=10$

Trên đồ thị chỉ có 1 điểm nên phương trình $3a^2-2(m+1)a+4m-8=0$ có nghiệm kép hay $\Delta'=0$ tức $m=5$, thay vào ta được $a=2\Rightarrow M(2;29)$.

Vậy, tiếp tuyến cần tìm là $y=10x+9$.

2. Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C), khi đó: $y_0=y(x_0)=\frac{2x_0+3}{x_0+1}$

Ta có: $d\left[M,(d)\right]=2\Leftrightarrow\frac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Leftrightarrow 3x_0+4y_0-12=0$

hoặc $3x_0+4y_0+8=0$

- **Trường hợp 1**: $3x_0+4y_0-12=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0 \Leftrightarrow 3x_0^2-x_0=0$

$\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\frac{1}{3}$.

- **Trường hợp 2**: $3x_0+4y_0+8=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0 \Leftrightarrow 3x_0^2+19x_0+20=0$

$\Leftrightarrow x_0=-5$ hoặc $x_0=-\frac{4}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M thuộc đồ thị (C) có dạng:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$ và $y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0+1)^2}$, $x_0 \neq -1$.

Phương trình tiếp tuyến (d_1) tại $M_1(0;3)$ là $y=-x+3$.

Phương trình tiếp tuyến (d_2) tại $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{11}{4}\right)$ là $y=-\frac{9}{16}x+\frac{47}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_3) tại $M_3\left(-5;\frac{7}{4}\right)$ là $y=-\frac{1}{16}x+\frac{23}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_4) tại $M_4\left(-\frac{4}{3};-1\right)$ là $y=-9x-13$.

Vậy, có 4 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài:

$y=-x+3$, $y=-\frac{9}{16}x+\frac{47}{16}$, $y=-\frac{1}{16}x+\frac{23}{16}$, $y=-9x-13$.

Ví dụ 8. 1. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-2}$ (C) và đường thẳng $(d_m): y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tâm đối xứng I của (C) cách đều hai tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị hai điểm A, B sao cho tiếp tuyến tại A và B song song với nhau và khoảng cách từ O đến đường thẳng đi qua hai điểm A, B bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Giải

1. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và (C) là nghiệm của phương trình $\frac{x+3}{x-2}=2x+m \Leftrightarrow 2x^2+(m-5)x-2m-3=0$ $(\forall x \neq 2)$

Để (d_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khác 2 nên phải có:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ g(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-5)^2+4.2.(2m+3)>0\\ 2.2^2+2(m+5)-2m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+3)^2+40>0\ \forall m\in\mathbb{R}\\ 15\neq 0\end{cases}$$

Các tiếp tuyến:

$(\Delta_1): y=-\frac{5}{(x_1-2)^2}(x-x_1)+1+\frac{5}{x_1-2}$, $(\Delta_1): y=-\frac{5}{(x_2-2)^2}(x-x_2)+1+\frac{5}{x_2-2}$

$$d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_1-2)^2(x_2-2)^2=25\\ (x_1-2)^2=(x_2-2)^2\end{array}\right. \Rightarrow m=-3.$$

Vậy, $m=-3$ là giá trị cần tìm.

2. Gọi $A\left(x_1;y_1=x_1^3-3x_1^2+1\right)$, $B\left(x_2;y_2=x_2^3-3x_2^2+1\right)$ là 2 điểm cần tìm với $x_1\neq x_2$. Ta có: $y'=3x^2-6x$.

Hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là:

$$k_1=3x_1^2-6x_1, k_2=3x_2^2-6x_2$$

Tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên:

$k_1=k_2 \Leftrightarrow 3x_1^2-6x_1=3x_2^2-6x_2$

$\Leftrightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2)-6(x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow x_1+x_2-2=0 \Rightarrow x_2=2-x_1$

Hệ số góc của đường thẳng AB là: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_1^3-x_2^3-3(x_1^2-x_2^2)}{x_2-x_1}$

$k=(x_1+x_2)^2-x_1x_2-3(x_1+x_2)=4-x_1(2-x_1)-6=-2x_1-2$

Phương trình đường thẳng AB là $y=(-2x_1-2)(x-x_1)+x_1^3-3x_1^2+1$

$\Leftrightarrow(-2x_1-2)x-y-+2x_1+1=0$

$$\Rightarrow d(O,AB)=\frac{\left|-x_1^2+2x_1+1\right|}{\sqrt{\left(x_1^2-2x_1-2\right)^2+1}}=\frac{\left|-x_1^2+2x_1+1\right|}{\sqrt{\left(-x_1^2+2x_1+1+1\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left|-x_1^2+2x_1+1\right|=\sqrt{2}\sqrt{\left(-x_1^2+2x_1+1+1\right)^2+1}$. Bình phương 2 vế và rút gọn được: $3\left(-x_1^2+2x_1+1\right)^2-4\left(-x_1^2+2x_1+1\right)-4=0$

$\Leftrightarrow -x_1^2+2x_1+1=2$ (1) hoặc $-x_1^2+2x_1+1=-\frac{2}{3}$ (2)

Giải (1) ta được $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

Giải (2) ta được $x_1 = \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$ hoặc $x_1 = \dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$

Vậy, các điểm cần tìm là $A\left(\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}; -\dfrac{9+2\sqrt{6}}{9}\right), B\left(\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}; \dfrac{-9+2\sqrt{6}}{9}\right)$ hoặc ngược lại.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết:

1. Hoành độ tiếp điểm bằng 1;
2. Tung độ tiếp điểm bằng 9;
3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{18}x + 1$;
4. Tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$.

Giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$

1. Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 3(x-1) - 1 = 3x - 4$.

2. Ta có: $y_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2, x_0 = -4$.

- $x_0 = -4 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x+4) + 9 = 18x + 81$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = -9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -9(x+1) + 9 = -9x$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 18$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x-2) + 9 = 18x - 27$.

3. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{18}x + 1$ nên

Ta có: $y'(x_0) = 18 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4, x_0 = 2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 27$.

4. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = -\frac{3}{2}$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -6$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x + 1$.
- $x_0 = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \dfrac{107}{8}, y'(x_0) = -\dfrac{33}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến: $y' = -\dfrac{33}{4}\left(x + \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{107}{8} = -\dfrac{33}{4}x + 1$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết:

1. Hoành độ tiếp điểm bằng 0;
2. Tung độ tiếp điểm bằng 3;
3. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9;
4. Tiếp tuyến vuông góc với trục Oy.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

1. Ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1,\ y'(x_0) = -3$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -3x + 1$.

2. Ta có: $y_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2,\ x_0 = -1$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 3$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x-2) + 3 = 9x - 13$.

3. Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x-2) + 3 = 9x - 13$.
- $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x+2) - 1 = 9x + 17$.

4. Vì tiếp tuyến vuông góc với Oy nên ta có: $y'(x_0) = 0$

Hay $x_0 = \pm 1$. Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 3,\ y = -1$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ biết:

1. Tung độ tiếp điểm bằng 1
2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$.

Giải

Ta có: $y' = 8x^3 - 8x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

1. Ta có: $y_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = \pm\sqrt{2}$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$
- $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = 8\sqrt{2}$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 8\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + 1 = 8\sqrt{2}x - 15$.
- $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y'(x_0) = -8\sqrt{2}$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = -8\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right) + 1 = -8\sqrt{2}x - 15$.

2. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 48x - 1$

Nên ta có: $y'(x_0) = 48 \Leftrightarrow x_0^3 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Suy ra $y_0 = 17$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 48(x-2) + 17 = 48x - 79$.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết:

1. Tung độ tiếp điểm bằng 1
2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x - 1$
3. Tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;3)$.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 2x$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

1. Ta có $y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^4 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0,\ y'(x_0) = 0$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 1$

2. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6x - 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow 4x_0^3 + 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = 6x - 3$.

3. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = \left(4x_0^3 + 2x_0\right)\left(x - x_0\right) + x_0^4 + x_0^2 + 1$

Vì tiếp tuyến đi qua $M(-1;3)$ nên ta có:

$$3 = \left(4x_0^3 + 2x_0\right)\left(-1 - x_0\right) + x_0^4 + x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 3x_0^4 + 4x_0^3 + x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)^2(3x_0^2 - 2x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3, y'(x_0) = -6$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x - 3$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

1. Tung độ tiếp điểm bằng -2.
2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.
3. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(4;3)$
4. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

1. Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 nên ta có: $-\frac{4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7.$
- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1.$

2. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2.$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2.$
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14.$

3. Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;3)$ nên ta có: $3 = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(4 - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}$

$$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2 = 4(x_0-4) + 2(x_0^2-1) \Leftrightarrow x_0^2 - 10x_0 - 21 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3, x_0 = 7$$

- $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = \frac{8}{3},\ y'(x_0) = -\frac{1}{9}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -\frac{1}{9}(x-7) + \frac{8}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9}$.

- $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 1,\ y'(x_0) = -\frac{1}{4}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -\frac{1}{4}(x+3) + 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

4. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường phân giác $y = \pm x$, do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 hay $y'(x_0) = \pm 1$. Mà $y' < 0,\ \forall x \neq 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7.$

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết:

1. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}x+2$

2. Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{6}$.

3. Tiếp tuyến đi qua $A(-7;5)$.

Giải

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

1. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}x+2$ nên ta có:

$$y'(x_0)=-3\Leftrightarrow\frac{-3}{(x_0-1)^2}=-3\Leftrightarrow x_0=0,\ x_0=2$$

- $x_0=0\Rightarrow y_0=-1$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-3x-1$.
- $x_0=2\Rightarrow y_0=5$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-3(x-2)+5=-3x+11$.

2. Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$.

- $\Delta\cap Ox=A:\begin{cases}y=0\\ \dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}=0\end{cases}$. Suy ra $A\left(\dfrac{2x_0^2+2x_0-1}{3};0\right)$.
- $\Delta\cap Oy=B:\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\end{cases}$. Suy ra: $B\left(0;\dfrac{2x_0^2+2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

Diện tích tam giác OAB: $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2$

Suy ra: $S_{OAB}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2=1$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2+2x_0-1=x_0-1\\ 2x_0^2+2x_0-1=-x_0+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0=0\\ 2x_0^2+3x_0-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0,x_0=-\dfrac{1}{2}\\ x_0=\dfrac{1}{2},x_0=-2\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là: $y=-3x+1,\ y=-3x+11,\ y=-12x+2,\ y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

3. Do tiếp tuyến đi qua $A(-7;5)$ nên ta có:

$$5=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0^2-4x_0-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=5\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4},\ y=\dfrac{3}{16}x+\dfrac{29}{16}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=x^4-8x^2+m+1$ (C_m). Chứng minh rằng tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ luôn cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt. Tìm tọa độ các giao điểm.

Giải

Ta có: $y'=4x^3-16x$

Vì $x_0=1\Rightarrow y_0=m-6,\ y'(x_0)=-12$. Phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là: $y=-12(x-1)+m-6=-12x+m+6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với d:

$$x^4-8x^2+m+1=-12x+m+6\Leftrightarrow x^4-8x^2+12x-5=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2+2x-5)=0\Leftrightarrow x=1,x=-1\pm\sqrt{6}$$

Vậy d và (C_m) luôn cắt nhau tại ba điểm phân biệt:

$$A(1;m-6),\ B\left(-1\pm\sqrt{6};m+18\mp\sqrt{6}\right).$$

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m+1}{x-1}$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m):

1. Tại điểm có hoành độ $x_0=0$ đi qua $A(4;3)$

2. Tại điểm có hoành độ $x_0=2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{25}{2}$.

Giải

Ta có: $y'=\dfrac{-m-3}{(x-1)^2}$

1. Vì $x_0=0\Rightarrow y_0=-m-1,\ y'(x_0)=-m-3$. Phương trình tiếp tuyến d của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là: $y=(-m-3)x-m-1$

Tiếp tuyến đi qua A khi và chỉ khi: $3=(-m-3)4-m-1\Leftrightarrow m=-\dfrac{16}{5}$.

2. Ta có $x_0=2\Rightarrow y_0=m+5,\ y'(x_0)=-m-3$. Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm có hoành độ $x_0=2$ là: $y=(-m-3)(x-2)+m+5=(-m-3)x+3m+11$.

- $\Delta \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\dfrac{3m+11}{m+3};0\right)$, với $m+3 \neq 0$
- $\Delta \cap Oy = B \Rightarrow B(0;3m+11)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\dfrac{(3m+11)^2}{|m+3|}$

Theo giả thiết bài toán ta suy ra: $\dfrac{1}{2}\dfrac{(3m+11)^2}{|m+3|} = \dfrac{25}{2}$

$$\Leftrightarrow (3m+11)^2 = 25|m+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9m^2+66m+121 = 25m+75 \\ 9m^2+66m+121 = -25m-75 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9m^2+41m+46 = 0 \\ 9m^2+91m+196 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2; m=-\dfrac{23}{9} \\ m=-7; m=-\dfrac{28}{9} \end{array}\right..$$

Bài 9. Giả sử tiếp tuyến của ba đồ thị $y=f(x), y=g(x), y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tại điểm của hoành độ $x=0$ bằng nhau. Chứng minh rằng $f(0) \leq \dfrac{1}{4}$.

Giải

Theo giả thiết ta có: $f'(0) = g'(0) = \dfrac{f'(0).g(0)-g'(0)f(0)}{g^2(0)}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0)=g'(0) \\ 1=\dfrac{g(0)-f(0)}{g^2(0)} \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = g(0)-g^2(0) = \dfrac{1}{4}-\left(g(0)-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}.$$

Bài 10. 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{4}{3}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C): $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ biết d cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$.

3. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được 2 tiếp tuyến đến đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$.

4. Cho hàm số $y=\dfrac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$ có đồ thị là (C_m), $m \in \mathbb{R}$ và $m \neq 0$. Với giá trị nào của m thì tại giao điểm đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến của đồ thị sẽ song song với đường thẳng $x-y-10=0$. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

5. Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d),(t)$ của đồ thị (C): $y=x^3-6x^2+9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

6. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị là (C). Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N, tìm tọa độ N.

Giải

1. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+4y-1=0$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k=4$

$\Rightarrow y'=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3; x=2$

* $x=-3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x+3)+\dfrac{1}{6}=4x+\dfrac{73}{6}$

* $x=2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=4(x-2)-\dfrac{2}{3}=4x-\dfrac{26}{3}$

2. Gọi $M(x_0;y(x_0))$, $x_0 \neq -1$ là tọa độ tiếp điểm của d và (C)

Khi đó d có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ và có phương trình là :

$$y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}.$$

Vì d cách đều A, B nên d đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của AB hoặc cùng phương với AB.

* **Trường hợp 1**: d đi qua trung điểm $I(-1;1)$, thì ta luôn có:

$1=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+2-\dfrac{1}{x_0+1}$, phương trình này có nghiệm $x_0=1$

Với $x_0=1$ ta có phương trình tiếp tuyến d : $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

* **Trường hợp 2**: d cùng phương với AB, tức là d và AB có cùng hệ số góc, khi đó $y'(x_0)=k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$ hay $\frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=0$

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+5$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+1$.

Vậy, có 3 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$, $y=x+5$, $y=x+1$.

3. Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của A tại N là:

$$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m.$$

$M\in(d)\Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0=3-3m\ (*)$

Dễ thấy $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=3-3m$ và $f(x_0)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0$.

Xét hàm số $f(x_0)=2x_0^3+5x_0^2-4x_0$ có $f'(x_0)=6x_0^2+10x_0-4$

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=\frac{1}{3}$. Lập bảng biến thiên, suy ra $m=\frac{100}{81}$, $m=-3$.

4. Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm phương trình:

$$\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}=0, m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m, m\neq 0\\(3m+1)x-m^2+m=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m, m\neq 0, m\neq -\frac{1}{3}\\x=\frac{m^2-m}{3m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0, m\neq -\frac{1}{3}\\x=\frac{m^2-m}{3m+1}\neq -m\end{cases}$. Mà $y'=\frac{4m^2}{(x+m)^2}$

$\Rightarrow y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=\frac{4m^2}{\left(\frac{m^2-m}{3m+1}+m\right)^2}$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $x-y-10=0$ nên $y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right)=1\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=-\frac{1}{5}$

* $m=-1$ giao điểm là $A(-1;0)$, tiếp tuyến là $y=x+1$.

* $m=-\frac{1}{5}$ giao điểm là $B\left(\frac{3}{5};0\right)$, tiếp tuyến là $y=x-\frac{3}{5}$.

5. Gọi $A\left(x_1, y(x_1)=x_1^3-6x_1^2+9x_1\right), B\left(x_2, y(x_2)=x_2^3-6x_2^2+9x_2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d),(t)$ và đồ thị (C). (d) và (t) song song với nhau khi $y'(x_1)=y'(x_2)\Leftrightarrow 3x_1^2-12x_1+9=3x_2^2-12x_2+9\Leftrightarrow x_1+x_2=4$.

Với $x_1+x_2=4$ thì tồn tại $t>0: \begin{cases}x_1=2-t\Rightarrow y(x_1)=t^3-3t+2\\x_2=2+t\Rightarrow y(x_2)=-t^3+3t+2\end{cases}$

Dễ thấy trung điểm đoạn AB có tọa độ $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2\\y_0=\frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}=2\end{cases}$.

6. Tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0=2\Rightarrow y_0=3$

Ta có : $y'(x)=3x^2-3\Rightarrow y'(x_0)=y'(2)=9$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm M của đồ thị (C) là :

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=9(x-2)+3\Rightarrow y=9x-15$

Xét phương trình: $x^3-3x+1=9x-15\Leftrightarrow x^3-12x+16=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow x=-4$ hoặc $x=2$ (không thỏa)

Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm.

Bài 11. 1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+8x+5$ có đồ thị là (C). Chứng minh không có bất kỳ hai tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số lại vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x^2}{x-1}$. Tìm $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm $M(1+\sin\alpha;9)$ nằm trên đồ thị (C). Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm M.

3. Cho hàm số $y=x^4+2x^2-3$. Tìm phương trình tiếp tuyến của hàm số có khoảng cách đến điểm $M(0;-3)$ bằng $\frac{5}{\sqrt{65}}$.

4. Tìm m để đồ thị $y=x^3-3mx+2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x+y+7=0$ góc α sao cho $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Giải

1. Ta có $y'(x) = 3x^2 - 4x + 8$

Giả sử trái lại có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) vuông góc với nhau.

Gọi x_1, x_2 tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoành độ x_1, x_2.

Khi đó : $k_1, k_2 = -1 \Rightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1 \Rightarrow \left(3{x_1}^2 - 4x_1 + 8\right)\left(3{x_2}^2 - 4x_2 + 8\right) = -1 \quad (1)$

Tam thức $f(t) = 3t^2 - 4t + 8$ có $\Delta' < 0$ nên $f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ từ đó và từ (1) suy ra mâu thuẫn. Vậy, giả thiết phản chứng là sai, suy ra đpcm.

2. Vì $M(1+\sin\alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) nên: $\dfrac{2(1+\sin\alpha)^2}{1+\sin\alpha-1} = 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = 2 \end{array}\right.$. Vì $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2}; 9\right)$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là: $y = y'\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 9$ hay $(d): y = -6x + 18$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại: $A(1;12)$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tại điểm B có tọa độ là nghiệm $(x;y)$ hệ phương trình: $\begin{cases} y = -6x + 18 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2;6)$.

3. Gọi $A \in (C) \Rightarrow A\left(a; a^4 + 2a^2 - 3\right)$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(a) = 4a^3 + 4a$

Phương trình tiếp tuyến (t): $\left(4a^3 + 4a\right)x - y - 3a^4 - 2a^2 - 3 = 0$

$d(M;(t)) = \dfrac{5}{\sqrt{65}}$ hay $\dfrac{3a^4 + 2a^2}{\sqrt{\left(4a^3 + 4a\right)^2 + 1}} = \dfrac{5}{\sqrt{65}}$

Hay $5(a-1)(a+1)\left(117a^6 + 193a^4 + 85a^2 + 5\right) = 0$.

4. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (k; -1)$, d có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (1;1)$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{2}$ hoặc $k = \dfrac{2}{3}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình $y' = k_1$ hoặc $y' = k_2$ có nghiệm x tức $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{3}{2} \text{ có nghiêm} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{2}{3} \text{ có nghiêm} \end{array}\right.$

Bài 12. Cho hàm số: $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):

1. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.
2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.
3. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.
4. Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

Giải

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

1. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Nên có: $\dfrac{-4}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3,\ x_0 = -1$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1$, $y = -x + 7$.

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

Nên có: $y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta : y = -4x + 2$
- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta : y = -4x + 14$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -4x + 2,\ y = -4x + 14$.

3. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ±1. Mặt khác: $y'(x_0) < 0$, nên có: $y'(x_0) = -1$

Tức $\frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 3$.

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta : y = -x - 1$
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta : y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1,\ y = -x + 7$.

4. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2; \frac{2}{3}\right),\ M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ là: $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là: $y = 4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9},\ y = 4x + 14$.

Bài 13. 1. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x - 2}$, có đồ thị là (C). Tìm a, b biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

2. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$, có đồ thị là (C). Tìm a, b, c biết (C) có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3)$ và tiếp tuyến d của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox có phương trình là $y = -8\sqrt{3}x + 24$.

Giải

1. Giao điểm của tiếp tuyến $d : y = -\frac{1}{2}x + 2$ với trục Ox là $A(4;0)$, hệ số góc của d: $k = -\frac{1}{2}$ và $A(4;0), \in (C) \Leftrightarrow \frac{4a + b}{2} = 0 \Leftrightarrow 4a + b = 0$.

Ta có: $y' = \frac{-2a - b}{(x - 2)^2} \Rightarrow y(4) = \frac{-2a - b}{4}$

Theo bài toán thì: $k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y'(4) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2a - b}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a + b = 2$

Giải hệ $\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$ ta được $a = -1,\ b = 4$

2. (C) có ba điểm cực trị, điểm cực tiểu của (C) có tọa độ là $(0;3) \Leftrightarrow \begin{cases} a<0,\ b>0 \\ c=3 \end{cases}$

Giao điểm của tiếp tuyến d và trục Ox là $B\left(\sqrt{3}; 0\right)$ và hệ số góc của d là $-8\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \in (C) \\ y'\left(\sqrt{3}\right) = -8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 4a\left(\sqrt{3}\right)^3 + 2b\sqrt{3} = -8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = -4 \end{cases}.$$

Giải hệ: $\begin{cases} c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 6a + b = -4 \end{cases}$ ta được $a = -1,\ b = 2,\ c = 3 \Rightarrow y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Bài 14. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ có đồ thị là (C):

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $x - 48y + 1 = 0$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(1;-3)$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Giải

Ta có $y' = 8x^3 - 8x$. Gọi $M(x_0; y_0)$. Tiếp tuyến Δ tại M có phương trình:

$$y = (8x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1.$$

1. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 48y + 1 = 0$

Nên ta có: $y'(x_0).\frac{1}{48} = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -48$

$x_0^3 - x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 15$.

Phương trình $\Delta : y = -48(x + 2) + 15 = -48x - 81$.

2. Vì tiếp tuyến Δ đi qua $A(1;-3)$ nên ta có:

$-3 = (8x_0^3 - 8x_0)(1 - x_0) + 2x_0^4 - 4x_0^2 - 1$

$\Leftrightarrow 3x_0^4 - 4x_0^3 - 2x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2(x_0 + 1)(3x_0 - 1) = 0$

- $x_0 = \pm 1 \Rightarrow \Delta : y = -3$
- $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta : y = -\frac{64}{27}x - \frac{51}{81}$.

3. Giả sử Δ tiếp xúc với (C) tại điểm thứ hai $N(n;2n^4-4n^2-1)$

Suy ra: $\Delta: y=(8n^3-8n)(x-n)+2n^4-4n^2-1$

Nên ta có: $\begin{cases}8x_0^3-8x_0=8n^3-8n\\ -6x_0^4+4x_0^2-1=-6n^4+4n^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+nx_0+n^2-1=0\\ (x_0+n)(3x_0^2+3n^2-2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\ x_0+n=0\end{cases}$ (I) hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+x_0n+n^2-1=0\\ 3x_0^2+3n^2-2=0\end{cases}$ (II)

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=-n\\ n=\pm 1\end{cases}$; (II) $\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2+n^2=\dfrac{2}{3}\\ x_0n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $\Delta: y=-3$.

Bài 15: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m).

1. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ song song với đường thẳng $y=3x+10$.
2. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=2x+1$.
3. Tìm m để từ điểm $M(1;2)$ vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

Giải

Ta có: $y'=3x^2-4x+m-1$

1. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x=1$ có phương trình:

$y=(m-2)(x-1)+3m-2=(m-2)x+2m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}m-2=3\\ 2m\neq 10\end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

2. Ta có: $y'=3\left(x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}\right)+m-\dfrac{7}{3}=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+m-\dfrac{7}{3}\Rightarrow y'\geq m-\dfrac{7}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc có giá trị: $k=m-\dfrac{7}{3}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k.2=-1 \Leftrightarrow \left(m-\dfrac{7}{3}\right).2=-1 \Leftrightarrow m=\dfrac{11}{6}$.

3. Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại A:

$y=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$

$M\in\Delta \Leftrightarrow 2=\left(3x_0^2-4x_0+m-1\right)(1-x_0)+x_0^3-2x_0^2+(m-1)x_0+2m$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+5x_0^2-4x_0+3m-3=0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có đúng hai nghiệm phân biệt (1)

Xét hàm số: $h(t)=2t^3+5t^2-4t,\ t\in\mathbb{R}$

Ta có: $h'(t)=6t^2+10t-4 \Rightarrow h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3},\ t=-2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	12	↘	$-\frac{19}{27}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-3m=12\\ 3-3m=-\dfrac{19}{27}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=\dfrac{100}{81}\end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 16. Tìm m để đồ thị :

1. $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.
2. $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

Giải

1. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có: $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$.

Từ yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt, tức $mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq\frac{1}{2}\\ 0<m<1\\ 0<m<\frac{2}{3}\end{cases}$ hay $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

2. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq 1)\ (1)$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta phải có:

$$\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\ 1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}\text{ hay }\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\ 2m(m+1)\neq 0\end{cases}\text{ tức }\begin{cases}-1<m<1\\ m\neq 0\end{cases}\quad(2).$$

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1). Theo định lý Vi – ét, ta có: $x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I(x_0;0)$ là giao điểm của (C_m) và trục hoành. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm I có hệ số góc:

$$y'(x_0)=\frac{(2x_0+2m)(x_0-1)-(x_0^2+2mx_0+2m^2-1)}{(x_0-1)^2}=\frac{2x_0+2m}{x_0-1}$$

Như vậy, tiếp tuyến tại A, B lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1)=\frac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'(x_2)=\frac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại A, B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2)=-1$ hay $\left(\frac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\frac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1\Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)(x_1+x_2)+4m^2+1=0$ tức $3m^2+m-2=0\ \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\frac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn.

Vấn đề 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc của tiếp tuyến

I. PHƯƠNG PHÁP

- Giải phương trình $f'(x)=k$ giải phương trình này ta tìm được các nghiệm $x_1,x_2,...,x_n$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_i)(x-x_i)+f(x_i)\ (i=1,2,...,n)$.

Chú ý: Đối với bài toán này ta cần lưu ý một số vấn đề sau:

- Số tiếp tuyến của đồ thị chính là số nghiệm của phương trình: $f'(x)=k$.
- Cho hai đường thẳng $d_1:y=k_1x+b_1$ và $d_2:y=k_2x+b_2$. Khi đó:

i) $\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1.k_2}\right|$, trong đó $\alpha=\widehat{(d_1,d_2)}$.

ii) $d_1//d_2\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=k_2\\ b_1\neq b_2\end{cases}$

iii) $d_1\perp d_2\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$.

Nếu đường thẳng d cắt các trục *Ox, Oy* lần lượt tại *A, B* thì $\tan\widehat{OAB}=\pm\frac{OB}{OA}$, trong đó hệ số góc của d được xác định bởi $y'(x)=\tan\widehat{OAB}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C):

1. Giải bất phương trình $y'<-4$;
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B mà OA = 4OB.

Giải

1. Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$.

Bất phương trình: $y'<-4\Leftrightarrow\frac{-1}{(x-1)^2}<-4\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2<\frac{1}{4}\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-1|<\frac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$

2. * **Cách 1:**

Ta có $\tan\widehat{OAB}=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k=\frac{1}{4}$ hoặc $k=-\frac{1}{4}$.

Nhưng do $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\frac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình: $\frac{-1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Từ đó ta xác định được hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

* **Cách 2:**

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)$ $(x_0 \neq 1)$ là:

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1} \text{ hay } y=\frac{-x}{(x_0-1)^2}+\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}$$

Ta xác định được tọa độ giao điểm của tiếp tuyến với các trục tọa độ:

$$A(2x_0^2-2x_0+1;0), B\left(0;\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right)$$

Từ giả thiết $OA=4OB$, ta có:

$$\left|2x_0^2-2x_0+1\right|=4\left|\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right| \Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-1 \end{array}\right..$$

* **Cách 3:** Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $ab \neq 0$.

Với giả thiết $OA=4OB \Rightarrow |a|=4|b| \Leftrightarrow a=\pm 4b \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\pm\frac{1}{4}$

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có dạng $\Delta: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ hay $\Delta: y=-\frac{b}{a}x+b$

Đường $\Delta: y=-\frac{b}{a}x+b$ tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chi khi

hệ sau có nghiệm x_0: $\begin{cases} \frac{-1}{(x_0-1)^2}=-\frac{b}{a} & (*) \\ \frac{2x_0-1}{x_0-1}=-\frac{b}{a}x_0+b & (**) \end{cases}$ (I).

Từ (*) suy ra $-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{4}$.

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} \frac{-1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4} \\ \frac{2x_0-1}{x_0-1}=-\frac{1}{4}x+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-1 \end{array}\right. \\ b=\frac{2x_0-1}{x_0--1}+\frac{1}{4}x_0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{13}{4} \\ b=\frac{5}{4} \end{array}\right.$.

Do vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

Ví dụ 2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-2mx+m}{x+m}$, m là tham số khác 0 và khác $-\frac{1}{3}$

1. Chứng minh rằng nếu (C) cắt Ox tại điểm M có hoành độ x_0 thì hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là : $k=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}$
2. Tìm m để (C) cắt Ox tại hai điểm và hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Giải

1. Ta có $y=x-3m+\frac{3m^2+m}{x+m}$

Khi $m \neq 0$ và $m \neq -\frac{1}{3}$ thì đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu do đó đồ thị hàm số không suy biến thành đường thẳng.

Hệ số góc của tiếp tuyến (d) của (C) tại M là:

$$k=y'(x_0)=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)-(x_0^2-2mx_0+m)}{(x_0+m)^2}.$$

Vì M thuộc Ox nên $y(x_0)=\frac{x_0^2-2mx_0+m}{x_0+m}=0 \Rightarrow x_0^2-2mx_0+m=0$.

$\Rightarrow k=\frac{(2x_0-2m)(x_0+m)}{(x_0+m)^2}=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}$ (đpcm).

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox

$$\frac{x^2-2mx+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ g(x)=x^2-2mx+m=0 \ (1) \end{cases}$$

(C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt M,N $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khác $-m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m>0 \\ g(-m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ 3m^2+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases}. (*)$$

Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến của (C) tại M, N là:

$$k_1=\frac{2x_1-2m}{x_1+m},\ k_2=\frac{2x_2-2m}{x_2+m}.$$

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}\right)\left(\frac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4[x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2] = -x_1x_2 - m(x_1 + x_2) - m^2 \quad (2)$$

Lại có $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1.x_2 = m$. Do đó: $(2) \Leftrightarrow -m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}$.

So với điều kiện (*) nhận $m = 5$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng đi qua điểm M và điểm $I(1;1)$.

Giải

Với $x_0 \neq 1$, tiếp tuyến (d) với (C) tại $M\left(x_0; \frac{x_0}{x_0 - 1}\right)$ có phương trình:

$$y = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - 1)^2}x + y - \frac{x_0^2}{(x_0 - 1)^2} = 0$$

(d)có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = \left(-1; \frac{1}{(x_0 - 1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{1}{x_0 - 1}\right)$

Để (d) vuông góc IM điều kiện là: $\vec{u}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -1.(x_0 - 1) + \frac{1}{(x_0 - 1)^2}\frac{1}{x_0 - 1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 0$, ta được $M(0;0)$; Với $x_0 = 2$, ta được $M(2;2)$.

Vậy $M(0;0)$ và $M(2;2)$ là tọa độ cần tìm.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị là (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 9$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 9x_0 + 5$.

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 3(x_0 + 1)^2 - 12 \geq -12$

$\min k = -12$, đạt được khi: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 16$.

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại M $(-1;16)$ có hệ số góc nhỏ nhất và có phương trình là: $y = -12x + 4$.

Ví dụ 5. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$.

1. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A thuộc (C) có hoành độ $x = 3$. Tìm giao điểm khác A của (d) và (C).
2. Xác định tham số a để tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a.
3. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình $y'' = 0$ của (C).

Giải

1. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm A: $y = y'(3)(x - 3) + y(3) = -18x + 49$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$-2x^3 + 6x^2 - 5 = -18x + 49 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Suy ra giao điểm của (d) và (C) khác A là $B(-3;103)$.

2. Tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) có hệ số góc là a $\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$, $y'(x_0) = a$ $\Leftrightarrow \exists x_0 : -6x_0^2 + 12x_0 = a$.

Bài toán quy về: Tìm a để phương trình $-6x^2 + 12x = a$ (1) có nghiệm.

$(1) \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + a = 0$. (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 6a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 6$. Vậy $a \leq 6$.

3. Từ giả thiết, suy ra hoành độ phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1;-1)$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) đi qua $I(1;-1)$. có dạng : $y = k(x-1) - 1$.

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0^3 + 6x_0^2 - 5 = k(x_0 - 1) - 1 & (1) \\ -6x_0^2 + 12x_0 = k & (2) \end{cases}$

có nghiệm x_0. Thay (2) vào (1) ta được:

$$-2x_0^3 + 6x_0^2 - 5 = (-6x_0^2 + 12x_0)(x_0 - 1) - 1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Suy ra phương trình $(d): y = 6x - 7$.

Ví dụ 6 : Cho hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \frac{5}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm m để trên (C) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1.x_2 > 0$ và tiếp tuyến của (C) tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x - 3y + 1 = 0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -2x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2$. Hệ số góc của $d: x - 3y + 1 = 0$ là $k_d = \frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ vuông góc với d thì phải có: $y' = -3$

Trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình:

$$-2x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2 = -3 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(m-1)x - 3m - 1 = 0 \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1.x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + 2(3m+1) > 0 \\ \dfrac{-3m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ -1 < m < -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, $m < -3$ hoặc $-1 < m < -\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 7. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ tại điểm M, biết M cùng 2 điểm cực trị của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

Giải

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A(1;2)$, $B(3;-2)$ và đường thẳng đi qua 2 cực trị là AB: $2x + y - 4 = 0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) của hàm số và tiếp tuyến (d) cần tìm. Khi đó $y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2$

Ta có: $AB = 2\sqrt{5}$, $d(M;AB) = \dfrac{|2x_0 + y_0 - 4|}{\sqrt{5}}$

Giả thiết $S_{MAB} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.AB.d(M;AB) = 6 \Leftrightarrow |2x_0 + y_0 - 4| = 6$

$\Leftrightarrow 2x_0 + y_0 = 10$ hoặc $2x_0 + y_0 = -2$

Trường hợp 1: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0 + y_0 = -2 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2 - 2x_0 \\ x_0\left(x_0^2 - 6x_0 + 11\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ x_0 = 0 \end{cases} \text{ hay } M(0;-2)$$

Tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 2$.

Trường hợp 2: Tọa độ M thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 10 \\ y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 10 - 2x_0 \\ (x_0 - 4)\left(x_0^2 - 6x_0 + 11\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{cases} \text{ hay } M(4;2)$$

Tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 34$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = 9x - 2$ và $y = 9x - 34$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}\right) \in (C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình Δ:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)} \Rightarrow y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}$$

Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2};0\right)$, $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

Δ OAB có trọng tâm là: $G\left(-\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6};\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2}\right)$.

Do G thuộc đường thẳng: $4x + y = 0 \Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(x_0+1)^2} \text{ (vì A, B} \neq O \text{ nên } x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \dfrac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ x_0 = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$; Với $x_0 = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 9.

1. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y = x^3 - 3x^2 + m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB có diện tích bằng 1,5.
2. Tìm các giá trị dương của m để (C_m): $y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ lớn nhất cùng với 2 trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 24.

Giải

1. $x=1 \Rightarrow y(1)=m-2$ suy ra $M(1;m-2)$. Tiếp tuyến tại M là d: $y=-3x+m+2$.

d cắt Ox tại A nên $A(x_A;0)$ và $A \in d$ suy ra $A\left(\frac{m+2}{3};0\right)$

d cắt Oy tại B nên $B(0;y_B)$ và $B \in d$ suy ra $B(0;m+2)$

Diện tích tam giác OAB có diện tích bằng 1,5 khi và chỉ khi

$\frac{1}{2}.|OA|.|OB|=\frac{3}{2}$ hay $|OA|.|OB|=3 \Leftrightarrow \left|\frac{m+2}{3}\right|.|m+2|=3$ hay $(m+2)^2=9$

phương trình này có 2 nghiệm $m=-5$ hoặc $m=1$.

Vậy, $m=-5$ hoặc $m=1$ là giá trị cần tìm.

2. Phương trình hoành độ giao điểm (C_m) và trục hoành :

$$x^4-3(m+1)x^2+3m+2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)\left[x^2-(3m+2)\right]=0 \quad (*)$$

Với $m>0$ thì (C_m) cắt trục hoành tại 4 giao điểm phân biệt và $x=\sqrt{3m+2}$ là hoành độ lớn nhất.

Giả sử $A\left(\sqrt{3m+2};0\right)$ là giao điểm có hoành độ lớn nhất và tiếp tuyến d tại A có phương trình: $y=2(3m+1)\sqrt{3m+2}.x-2(3m+1)(3m+2)$

Gọi B là giao điểm của d và Oy suy ra $B(0;-2(3m+1)(3m+2))$

Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại O và $S_{OAB}=24 \Leftrightarrow OA.OB=48$

hay $\sqrt{3m+2}\left(18m^2+22m+4\right)=48 \quad (*)$

Xét $f(m)=\sqrt{3m+2}\left(18m^2+22m+4\right)-48,\ m>0$.

Ta có: $f'(m)>0$ với mọi $m>0$, suy ra $f(m)$ đồng biến với mọi $m>0$ và

$f\left(\frac{2}{3}\right)=0$, do đó phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $m=\frac{2}{3}$.

Vậy, $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 10. Tìm $m \in \mathbb{R}$, để tiếp tuyến của đồ thị hàm số : $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$ theo 1 dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Giải

$y'=3x^2-m \Rightarrow y'(1)=3-m$. Với $x=1 \Rightarrow y(1)=0 \Rightarrow M(1;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M: $y=y'(1)(x-1) \Leftrightarrow (3-m)x-y-3+m=0(d)$.

Đường tròn có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vì $IM>R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (d) tiếp xúc với đường tròn, tức là $d(I;(d))=R$

$\Leftrightarrow \frac{|(3-m)2-3-3+m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ hay $\frac{|m|}{\sqrt{m^2-6m+10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình $2m^2+3m-5=0$, giải phương trình này ta được $m=1$ hoặc $m=\frac{5}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 11. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có chu vi $2\pi\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Giải

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=m-2 \Rightarrow M(1;m-2)$

Tiếp tuyến tại M là d: $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+m-2 \Rightarrow d: y=-3x+m+1$

d cắt trục Ox tại A: $0=-3x_A+m+1 \Leftrightarrow x_A=\frac{m+1}{3} \Rightarrow A\left(\frac{m+1}{3};0\right)$

d cắt trục Oy tại B : $y_B=m+1 \Rightarrow B(0;m+1)$

Tam giác vuông tại O, trung điểm I của AB là tâm đt ngoại tiếp $I\left(\frac{m+1}{6};\frac{m+1}{2}\right)$

BK $OI=\sqrt{\frac{5}{18}}|m+1|$. Giả thiết có $2\pi OI=2\pi\sqrt{\frac{5}{18}} \Leftrightarrow |m+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=- \end{array}\right.$.

Ví dụ 12. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (t) của (C), biết:

1. (t) tiếp xúc với đường tròn: $(\gamma):(x-2)^2+(y-6)^2=45$.
2. Khoảng cách từ (t) đến điểm I(1; 1) lớn nhất.

Giải

1. Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$ với I(1;1), hệ trục Oxy ⇒ hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ: $\begin{cases} x = X + x_1 = X + 1 \\ y = Y + y_1 = Y + 1 \end{cases}$

Đối với hệ trục IXY thì A có tọa độ là $\begin{cases} X = x - 1 = 2 - 1 = 1 \\ Y = y - 1 = 6 - 1 = 5 \end{cases}$

Hàm số cho trở thành : $Y + 1 = \dfrac{X + 1 + 1}{(X + 1) - 1} = \dfrac{X + 2}{X} \Leftrightarrow Y = \dfrac{2}{X} = F(X)$.

Phương trình của đường tròn (γ) là $(X - 1)^2 + (Y - 5)^2 = 45$, (γ) có tâm A(1; 5), bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Phương trình tiếp tuyến (D) của (C) tại điểm có hoành độ X_0 là:

$$Y = F'(X_0)(X - X_0) + F(X_0) = -\frac{2}{X_0^2}(X - X_0) + \frac{2}{X_0} = -\frac{2}{X_0^2}X + \frac{4}{X_0}$$

$\Leftrightarrow 2X + X_0^2Y - 4X_0 = 0.$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d\big(A,(D)\big) = R$

$$\Leftrightarrow d[A,(D)) = \frac{\left|2 + 5X_0^2 - 4x_0\right|}{\sqrt{4 + X_0^4}} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow [(d(A,(D))]^2 = \frac{(5X_0^2 - 4X_0 + 2)^2}{4 + X_0^4} = 45$$

$$\Leftrightarrow 25X_0^4 + 16X_0^2 + 4 - 40X_0^3 + 20X_0^2 - 16X_0 = 180 + 45X_0^4$$

$$\Leftrightarrow 5X_0^4 + 10X_0^3 - 9X_0^2 + 4X_0 + 44 = 0 \Leftrightarrow (X_0 + 2)^2(5X_0^2 - 10X_0 + 11) = 0 \Leftrightarrow X_0 = -2$$

Vậy phương trình (D): $Y = -\dfrac{1}{2}X - 2$, suy ra phương trình (D) đối với hệ trục xuất phát Oxy là : $y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) - 2 = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

2. Đối với hệ tọa độ IXY , phương trình tiếp tuyến (d) có dạng :

$$2X + X_0^2Y - 4X_0 = 0,\ d(I,(d)) = \frac{|4X_0|}{\sqrt{4 + X_0^4}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có : $4 + X_0^4 \geq 2\sqrt{4X_0^4} = 4X_0^2$

$$\Rightarrow d(I,(d)) \leq \frac{|4X_0|}{\sqrt{4X_0^2}} = \frac{|4X_0|}{|2X_0|} = 2 \Rightarrow d(I,(d)) = 2 \Leftrightarrow X_0^4 = 4 \Leftrightarrow X_0 = \pm\sqrt{2}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến (d): $Y = -X + 2\sqrt{2}, Y = -X - 2\sqrt{2}$.

Suy ra phương trình (d) đối với hệ trục Oxy là $y = -x + 2 \pm 2\sqrt{2}$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thoả mãn OA = 4OB.

Giải

Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho OA = 4OB .

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$

Hệ số góc của (d) là $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2} = -\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \left(y_0 = \dfrac{3}{2}\right) \\ x_0 = 3 \quad \left(y_0 = \dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x + 1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x - 3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Bài 2. 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với $I(2;2)$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$. Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C), các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại 4 điểm lập thành một hình thang.

Giải

1. I(2; 2), gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}\right) \in (C)$, $x_0 \neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M : $y = -\dfrac{1}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Do $\cos\widehat{ABI}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ nên $\tan\widehat{ABI}=\frac{1}{4}=\frac{IA}{IB}$ $\Leftrightarrow IB^2=16.IA^2\Leftrightarrow(x_0-2)^4=16$

$\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=4$

Tại $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.

Tại $M\left(4;\frac{5}{3}\right)$ phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$.

2. Gọi $M(m;y_M)$, $N(n;y_N)$ là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C).

Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Tiếp tuyến tại N cắt hai tiệm cận tại C, D.

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y=y'(m).(x-m)+y_M$

$\Rightarrow A\left(1;\frac{2m+4}{m-1}\right)$, $B(2m-1;2)$. Tương tự: $C\left(1;\frac{2n+4}{n-1}\right)$, $D(2n-1;2)$.

Hai đường thẳng AD và BC đều có hệ số góc: $k=\frac{-3}{(m-1)(n-1)}$ nên AD // BC.

Vậy mọi điểm M, N thuộc 2 nhánh của (C) đều thoả mãn bài toán.

Bài 3. 1. Chứng minh rằng với một điểm M tùy ý thuộc $(C):y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến tại M cắt (C) tại hai điểm A,B tạo với $I(-2;-1)$ một tam giác có diện tích không đổi ,không phụ thuộc vào vị trí của M.

2. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$, có đồ thị là (C).Tìm trên đường thẳng $d:y=2x+1$ các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

Giải

1. $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\frac{1}{x+2}$. Ta có : $y'=1-\frac{1}{(x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\frac{1}{x_0+2}(*)$

Tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta:y=\left[1-\frac{1}{(x_0+2)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\frac{1}{x_0+2}$

Nếu $\Delta\cap x=-2$ tại điểm A, thì $y_A=-\frac{x_0}{x_0+2}\Rightarrow A\left(-2;-\frac{x_0}{x_0+2}\right)$

Nếu Δ cắt tiệm cận xiên tại điểm B thì:

$$\left[1-\frac{1}{(x_0+2)^2}\right](x_B-x_0)+x_0+1+\frac{1}{x_0+2}=x_B+1\Leftrightarrow x_B=2x_0+2\Rightarrow y_B=x_B+1=2x_0+3$$

$\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$

Nếu I là giao hai tiệm cận, thì I có tọa độ $I(-2;-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên tiệm cận đứng $x=-2$ suy ra $H(-2;2x_0+3)$

Diện tích tam giác $AIB:S=\frac{1}{2}AI.BH=\frac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_H|=\frac{1}{2}\left|-\frac{x_0}{x_0+2}+1\right||2x_0+2+2|$

Hay $S=\frac{1}{2}\frac{2}{|x_0+2|}.2|x_0+2|=2$ (đvdt).

Chứng tỏ S là một hằng số , không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

2. Gọi $M(m;2m+1)\in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y=k(x-m)+2m+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C): $k(x-m)+2m+1=\frac{x+3}{x-1}$

$\Leftrightarrow kx^2-[(m+1)k-2m]x+[mk-(2m+4)]=0$ (*)

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq0\\ \Delta=[(m+1)k-2m]^2-4k[mk-(2m+4)]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq0\\ g(k)=(m-1)^2k^2-4(m^2-m-4)k+4m^2=0\end{cases}$$

Qua $M(m;2m+1)\in d$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C)

$$\Leftrightarrow g(k)=0 \text{ có đúng 1 nghiệm } k\neq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=-32(m^2-m-2)>0;g(0)=4m^2=0\\ \Delta'=-32(m^2-m-2)>0;g(0)=4m^2=0\\ m-1=0\Rightarrow16k+4=0\Rightarrow k=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m=0 & \Rightarrow M(0;1)\\ m=-1 & \Rightarrow M(-1;-1)\\ m=2 & \Rightarrow M(2;5)\\ m=1 & \Rightarrow M(1;3)\end{array}\right..$$

Bài 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ có đồ thị là (C):

1. Chứng minh rằng (C) tiếp xúc với trục hoành.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.
3. Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

1. Xét hệ phương trình : $\begin{cases} -x^3 + 3x + 2 = 0 \\ -3x^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$

Vậy (C) tiếp xúc với Ox tại điểm có hoành độ $x = -1$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox:

$$-x^3 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2.$$

* $x = -1 \Rightarrow y = 0,\ y'(1) = 0$ phương trình tiếp tuyến: $y = 0$.

* $x = 2 \Rightarrow y = 0, y'(2) = -9$ phương trình tiếp tuyến: $y = -9(x - 2) = -9x + 18$.

3. Xét điểm $M(m;0) \in Ox$.

* **Cách 1:** Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - m)$.

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} -x^3 + 3x + 2 = k(x - m) \\ -3x^2 + 3 = k \end{cases}$ có nghiệm x.

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$3(x^2 - 1)(x - m) - (x^3 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2 - 3(1+m)x + 3m) - (x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)[2x^2 - (3m + 2)x + 3m + 2] = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $2x^2 - (3m + 2)x + 3m + 2 = 0 \ (2)$

Để từ M kẻ được ba tiếp tuyến thì (1) phải có nghiệm x, đồng thời phải có 3 giá trị k khác nhau, khi đó (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác –1, đồng thời phải có 2 giá trị k khác nhau và khác 0.

(2) phải có hai nghiệm phân biệt khác –1 khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta = (3m + 2)(3m - 6) > 0 \\ 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{2}{3}, m > 2 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (3)$$

Với điều kiện (3), gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (2), khi đó hệ số góc của ba tiếp tuyến là $k_1 = -3x_1^2 + 3,\ k_2 = -3x_2^2 + 3,\ k_3 = 0$.

Để hai trong ba tiếp tuyến này vuông góc với nhau $k_1.k_2 = -1$ và $k_1 \neq k_2$

$$k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 9(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2 - 9(x_1 + x_2)^2 + 18x_1x_2 + 10 = 0 \ (i)$$

Mặt khác theo định lí Viet: $x_1 + x_2 = \dfrac{3m + 2}{2}$; $x_1x_2 = \dfrac{3m + 2}{2}$.

Do đó (i) $\Leftrightarrow 9(3m + 2) + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{28}{27}$ thỏa điều kiện (3), kiểm tra lại ta thấy $k_1 \neq k_2$. Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$ là điểm cần tìm.

* **Cách 2:** Gọi $N(x_0;y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại N có phương trình:

$$y = \left(-3x_0^2 + 3\right)(x - x_0) + y_0.$$

Δ đi qua $M \Leftrightarrow 0 = \left(-3x_0^2 + 3\right)(m - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0 - 1)(x_0 + 1)(x_0 - m) - (x_0 + 1)^2(x_0 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 + 1)\left[2x_0^2 - (3m + 2)x_0 + 3m + 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ 2x_0^2 - (3m+2)x_0 + 3m + 2 = 0 \quad (a) \end{array}\right.$

Từ M vẽ được đến (C) ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ (a) có hai nghiệm phân biệt khác –1, và có hai giá trị $k = -3x_0^2 + 3$ khác nhau và khác 0 điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = (3m + 2)^2 - 8(3m + 2) > 0 \\ 2 + 2(3m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 2)(3m - 6) > 0 \\ 3m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < -\dfrac{2}{3}, m > 2 \end{cases} \ (b).$$

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-3p^2 + 3)(-3q^2 + 3) = -1$ (trong đó p, q là hai nghiệm của phương trình (a)) $\Leftrightarrow 9p^2q^2 - 9(p^2 + q^2) + 10 = 0 \Leftrightarrow 9p^2q^2 - 9(p + q)^2 + 18pq + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9(3m + 2)^2}{4} - \dfrac{9(3m + 2)^2}{4} + 9(3m + 2) + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{28}{27}$. Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị là (C):

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : 24x - y + 1 = 0$.
2. Tìm $M \in Oy$ sao cho từ M vẽ đến (C) đúng ba tiếp tuyến.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt.

Giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

Gọi $A(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình:

$$\Delta : y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + y_0$$

1. Tiếp tuyến song song với $d: y = 24x + 1$ nên ta có: $4x_0^3 - 4x_0 = 24$ $\Leftrightarrow x_0^3 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 7$. Vậy $\Delta : y = 24x - 42$.

2. Vì (C) nhận Oy làm trục đối xứng nên nếu d là một tiếp tuyến của (C) thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của (C). Do đó, để từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C) thì trong ba tiếp tuyến đó phải có một tiếp tuyến vuông góc với Oy. Mà (C) có hai tiếp tuyến cùng phương với Ox là: $y = -2$ và $y = -1$. Đường thẳng này cắt Oy tại $M_1(0;-2)$, $M_2(0;-1)$.

   Ta kiểm tra được qua M_1 chỉ vẽ đến (C) được một tiếp tuyến, còn từ M_2 vẽ đến (C) được ba tiếp tuyến.

   Vậy $M(0;-1)$ là điểm cần tìm.

3. Giả sử Δ là tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt:

   $M(m; m^4 - 2m^2 - 1)$ và $N(n; n^4 - 2n^2 - 1)$ với $m \neq n$.

   Ta có phương trình $\Delta : y = y'(m)(x - m) + y(m)$

   $$\Delta : y = y'(n)(x - n) + y(n)$$

   Suy ra $\begin{cases} y'(m) = y'(n) \\ -m.y'(m) + y(m) = -n.y'(n) + y(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n^3 - 4n = 4m^3 - 4m \\ -3m^4 + 2m^2 - 1 = -3n^4 + 2n^2 - 1 \end{cases}$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-m)(n^2 + mn + n^2) - (n-m) = 0 \\ 3(n^2 - m^2)(n^2 + m^2) - 2(n^2 - m^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + mn + n^2 - 1 = 0 \\ (n+m)\left[3(n^2 + m^2) - 2\right] = 0 \end{cases} (*)$$

   Từ (*) ta có: $m + n = 0$ hoặc $n^2 + m^2 = \frac{2}{3}$.

   - $m + n = 0 \Rightarrow m = -n \Rightarrow n^2 = 1 \Leftrightarrow n = \pm 1$
   - $m^2 + n^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} mn = \frac{1}{3} \\ (m+n)^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$ vô nghiệm.

   Vậy $y = -2$ là tiếp tuyến cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị là (C):

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = -x + 1$ một góc α thỏa $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.
3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1; 6)$.

Giải

Ta có: $y' = 3(x^2 - 2x - 3)$

1. Do $y' = 3\left[(x-1)^2 - 4\right] \geq -12 \Rightarrow \min y' = -12$, đạt được khi $x = 1$.

   Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -12x + 2$.

2. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

   Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

   Hay $kx - y + b = 0$, Với $k = y'(x_0)$

   Theo bài ra ta có: $\cos\alpha = \frac{|k-1|}{\sqrt{k^2 + 1}.\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$

   $\Leftrightarrow 41(k-1)^2 = 50(k^2 + 1) \Leftrightarrow 9k^2 + 82k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = -9, k = -\frac{1}{9}$.

   - $k = -9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$

   Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = -9x + 1$ và $y = -9x - 3$.

   - $k = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow 27x_0^2 - 54x_0 - 80 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}$

   Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{9}\left(x - \frac{9 \pm \sqrt{321}}{9}\right) + y(x_0)$.

3. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M:

   $$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

   Do tiếp tuyến đi qua A nên ta có phương trình:

   $6 = 3(x_0^2 - 2x_0 - 3)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1$

   $\Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2$

   - $x_0 = -1 \Rightarrow y = 6$.
   - $x_0 = 2 \Rightarrow y = -9x - 3$.

Bài 7. 1. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+m}{x-2}$,m là tham số khác – 4 và (d) là một tiếp tuyến của (C) .Tìm m để (d) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2.

2. Cho hàm số $y = x^3 + 1 - m(x+1)$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 .

Giải

1. Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là x = 2, y = 2 , suy ra giao điểm của chúng là I(2; 2).

Tịnh tiến $\overrightarrow{OI}$. Hệ trục Oxy ⇒ Hệ trục IXY.

Công thức chuyển hệ tọa độ : $\begin{cases} x = X + x_I = X + 2 \\ y = Y + y_I = Y + 2 \end{cases}$

Đối với hệ trục IXY .

Hai đường tiệm cận đứng và ngang của (C) có phương trình lần lượt là X = 0 , Y = 0.

(C) có phương trình là $Y + 2 = \frac{2(X+2)+m}{X+2-2} \Rightarrow Y = F(X) = \frac{4+m}{X}$.

Gọi X_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) với (C) thì phương trình (d) là:

$$Y = -\frac{m+4}{X_0^2}(X - X_0) + \frac{m+4}{X_0} = -\frac{m+4}{X_0^2}X + \frac{2m+8}{X_0}.$$

Gọi A là giao điểm của (C) với đường tiệm cận đứng của nó thì $A\left(0;\frac{2m+8}{X_0}\right)$

Gọi B là giao điểm của (C) với đường tiệm cận ngang của nó thì $B(2X_0\,;0)$

Diện tích tam giác vuông IAB do (d) tạo với hai đường tiệm cận là:

$$S = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}|Y_A||X_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{2m+8}{X_0}\right||2X_0| = |2m+8|.$$

$$S = 2 \Leftrightarrow |2m+8| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+8=2 \\ 2m+8=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-5 \end{array}\right..$$

2. Ta có $M(0;1-m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung

$$y' = 3x^2 - m \Rightarrow y'(0) = -m$$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm m là: $y = -mx + 1 - m$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành và trục tung, ta có tọa độ $A\left(\frac{1-m}{m};0\right)$ và $B(0;1-m)$.

- Nếu $m = 0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này.
- Nếu $m \neq 0$ ta có:

$$S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right||1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị cần tìm.

Bài 8. 1. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm M ∈ (C) mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = 2m - 1$.

2. Cho hàm số $y = \frac{2mx+3}{x-m}$ .Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm m để tiếp tuyến tại một điểm bất kì của (C) cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích S = 22 .

3. Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A,B . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất , với I là giao điểm hai tiệm cận .

Giải

1. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M : $y = \frac{-3}{(2x_0-1)^2}(x - x_0) + y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung

$\Rightarrow y_B = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0-1)^2}$.

Từ đó trọng tâm G của ΔOAB có: $y_G = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0-1)^2}$.

Vì G ∈ d nên $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0-1)^2} = 2m - 1$

Mặt khác: $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0-1)^2} = \frac{6x_0^2 - (2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2} = \frac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2} - 1 \geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thỏa mãn bài toán thì $2m-1\ge -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m\ge \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $\frac{1}{3}$.

2. (C) có tiệm cận đứng $x=m$, tiệm cận ngang $y=2m$.

Giao điểm 2 tiệm cận là $I(m;2m)$ và $M\left(x_0;\frac{2mx_0+3}{x_0-m}\right)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M: $y=\frac{2m^2+3}{(x_0-m)^2}(x-x_0)+\frac{2mx_0+3}{x_0-m}$.

Δ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(m;\frac{2mx_0+2m^2+6}{x_0-m}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0-m;2m)$. Ta có: $IA=\left|\frac{4m^2+6}{x_0+m}\right|$; $IB=2|x_0-m|$

$\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=4m^2+6=22\Leftrightarrow m=\pm 4$.

3. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\frac{2x_0-3}{x_0-2}$ và $y'_0=-\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M: $y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích $S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\ge 2\pi$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y_0=1\\x_0=3\Rightarrow y_0=3\end{array}\right.$

Vậy $M(1;1)$ $M(3;3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài 9. Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C):

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.
2. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua tâm đối xứng.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x\ne 1$. Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

1. Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại A: $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow A\left(1;\frac{2x_0+6}{x_0-1}\right)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận ngang tại B: $\begin{cases}y=2\\ 2=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}\end{cases}\Rightarrow B(2x_0-1;2)$

Suy ra: $IA=\frac{8}{|x_0-1|}$; $IB=2|x_0-1|\Rightarrow IA.IB=16$

Chu vi tam giác IAB: $P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}$.

Mà $IA+IB\ge 2\sqrt{IA.IB}=8$; $IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=32$

Nên $P\ge 8+\sqrt{32}=8+4\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$

Vậy ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán: $\Delta: y=-x-1$ và $\Delta: y=-x+7$.

2. Tâm đối xứng $I(1;2)$, $I\in\Delta\Leftrightarrow 2=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow 1=\frac{2}{x_0-1}+\frac{x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0-1=x_0+3$ vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.

Bài 10. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, $c<0$ có đồ thị (C) cắt Oy ở A và có đúng hai điểm chung với trục Ox là M và N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm a, b, c để $S_{AMN}=1$.

Giải

Giả sử (C) cắt Ox tại M(m;0) và N(n;0) cắt Oy tại A(0;c)

Tiếp tuyến tại M có phương trình: $y=(3m^2+2am+b)(x-m)$.

Tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $3m^3+2am^2+bm+c=0$

$\Leftrightarrow 2m^3+am^2=0 \Leftrightarrow m=-\frac{a}{2}$ (do $m^3+am^2+bm+c=0$)

Mà (C) cắt Ox tại hai điểm nên (C) tiếp xúc với Ox.

Nếu M là tiếp điểm thì suy ra Ox đi qua A vô lí nên ta có (C) tiếp xúc với Ox tại N. Do đó: $y=x^3+ax^2+bx+c=(x-n)^2(x-m)$

Suy ra $\begin{cases} m+2n=-a \\ 2mn+n^2=b \\ mn^2=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{a}{2}, n=-\frac{a}{4} \\ a^3=32c \\ 5a^2=16b \end{cases}$ (1).

Mặt khác $S_{\Delta AMN}=1 \Leftrightarrow -c|n-m|=2 \Leftrightarrow -c|a|=8$

- $a>0$ ta có: $\begin{cases} a^3=32c \\ ac=-8 \\ 5a^2=16b \end{cases}$ vô nghiệm.
- $a<0$ ta có: $\begin{cases} a^3=32c \\ ac=8 \\ 5a^2=16b \end{cases} \Leftrightarrow a=-4, b=5, c=-2$

Bài 11: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ tâm đối xứng I đến tiếp tuyến tạo lớn nhất.
3. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với IM.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến Δ tại M:

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

1. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$ nên suy ra: $-\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$.

   Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

2. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Ta có $d(I,\Delta)=IH$

   Trong tam giác vuông IAB ta có: $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\ge\frac{2}{IA.IB}=\frac{1}{2}$

   Suy ra $IH\le\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB$.

   Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

3. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=\left(1;\frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$, $\overrightarrow{IM}=(x_0-1;\frac{1}{x_0-1})$.

   $IM\perp\Delta \Leftrightarrow x_0-1-\frac{1}{(x_0-1)^3}=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$.

   Từ đó ta tìm được tiếp tuyến: $y=-x+1, y=-x+5$.

Bài 12. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=x^4-3(m+1).x^2+3m+2$, m là tham số

Tìm các giá trị dương của tham số m để (Cm) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt và tiếp tuyến của (Cm) tại giao điểm có hoành độ lớn nhất hợp với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 24.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (Cm) và trục hoành là:

$$x^4-3(m+1).x^2+3m+2=0 \ (1)$$

Đặt $t=x^2, t\ge0$. Phương trình (1) trở thành : $t^2-3(m+1).t+3m+2=0$ (2)

(Cm) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt ⇔ Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

Vì (2) luôn có hai nghiệm là $t=1$, $t=3m+2$ với mọi m và vì $m>0$ (giả thiết) nên ta có $1<3m+2$, suy ra với mọi tham số $m>0$, (Cm) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt và nếu gọi A là giao điểm có hoành độ lớn nhất thì hoành độ A là $x_A=\sqrt{3m+2}$.

Gọi $f(x)=x^4-3(m+1).x^2+3m+2$, phương trình tiếp tuyến d của (Cm) tại A là $y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)=[4x_A^3-6(m+1)x_A](x-x_A)$ (vì $f(x_A)=0$)

$=[4(3m+2)\sqrt{3m+2}-6(m+1)\sqrt{3m+2}](x-\sqrt{3m+2})$

$=(6m+2)\sqrt{3m+2}\left(x-\sqrt{3m+2})\right)$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến d với trục Oy thì $B\left(0\,;(6m+2)(3m+2)\right)$.

Tam giác mà tiếp tuyến d tạo với hai trục toạ độ là tam giác vuông OAB (vuông tại O) ,theo giả thiết ta có : $S_{OAB}=24\Leftrightarrow OA.OB=48\Leftrightarrow |x_A||y_B|=48$

$\Leftrightarrow \sqrt{3m+2}(6m+2)(3m+2)=48$ (3).

Gọi $f(m)=\sqrt{3m+2}(6m+2)(3m+2)=\sqrt{3m+2}(18m^2+22m+4)$

$f'(m)=\dfrac{3}{2\sqrt{3m+2}}(18m^2+22m+4)+(36m+22)\sqrt{3m+2}>0$ với mọi $m>0$.

Suy ra hàm số f(m) đồng biến trên $(0;+\infty)$ và vì $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=24$, do đó phương trình (3) chỉ có một nghiệm là $m=\dfrac{2}{3}$ trên $(0;+\infty)$.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với đồ thị (C), để:

1. (d) cắt 2 tiệm cận tại A, B sao cho $IA^2+IB^2=40$ với $I(-1;2)$, biết (C): $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C), giao điểm hai tiệm cận là I. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) lần lượt tại E, F và chu vi $\Delta IEF=5+\sqrt{17}$.

Giải

1. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm và d là tiếp tuyến của (C) có phương trình : $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Giả sử d cắt 2 tiệm cận của (C) tại $A\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $B(2x_0+1;2)$

$IA^2+IB^2=40\Leftrightarrow \dfrac{36}{(x_0+1)^2}+4(x_0+1)^2=40$.

2. Ta có $y=\dfrac{2x-3}{x-2}=2+\dfrac{1}{x-2}\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ và $I(2;2)$.

Tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x_0 là: $y=-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\dfrac{1}{x_0-2}$

(Δ) cắt tiệm cận đứng tại $E\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$ và tiệm cận ngang tại $F(2x_0-2;2)$.

$\overrightarrow{IE}=\left(0;\dfrac{2}{x_0-2}\right)\Rightarrow IE=\dfrac{2}{|x_0-2|}$, $\overrightarrow{IF}=(2x_0-4;0)\Rightarrow IF=2|x_0-2|$

$P_{\Delta IEF}=IE+IF+EF=IE+IF+\sqrt{IE^2+IF^2}=\dfrac{2}{|x_0-2|}+2|x_0-2|+2\sqrt{\dfrac{1}{|x_0-2|^2}+|x_0-2|^2}$

Hay $x_0=0$ hoặc $x_0=4$ hoặc $x_0=\dfrac{3}{2}$ hoặc $x_0=\dfrac{5}{2}$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$, $y=-4x+6$, $y=-4x+14$, $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$

Bài 14. 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), để khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A,B sao cho AB ngắn nhất.

Giải

1. Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a\neq -2$ thuộc (C) có phương trình: $y=\dfrac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\dfrac{2a}{a+2}\Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2=0$

Tâm đối xứng của (C) là $I(-2;2)$.

$d(I,d)=\dfrac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}}\le\dfrac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}}=\dfrac{8|a+2|}{2\sqrt{2}\,|a+2|}=2\sqrt{2}$

$d(I,d)$ lớn nhất khi $(a+2)^2=4\Leftrightarrow a=-4$ hoặc $a=0$.

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y=x$ và $y=x+8$.

2. Lấy điểm $M\left(m; 2+\frac{1}{m-2}\right)\in(C)$. Ta có: $y'(m)=-\frac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\frac{1}{(m-2)^2}\right]\ge 8$. Đẳng thức xảy ra khi $m=1$ hoặc $m=3$.

Vậy, điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ hoặc $M(1;1)$.

Vấn đề 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi tiếp tuyến đi qua điểm cho trước

I. PHƯƠNG PHÁP

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ đi qua điểm $M(x_1;y_1)$

* **Cách 1 :**

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng: $y=k(x-x_1)+y_1$.
- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0;y_0)$ khi hệ: $\begin{cases} f(x_0)=k(x_0-x_1)+y_1 \\ f'(x_0)=k \end{cases}$ có nghiệm x_0.

* **Cách 2 :**

- Gọi $N(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M, nên (d) cũng có dạng $y=y'_0(x-x_0)+y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1=y'_0(x_1-x_0)+y_0$ (*)
- Từ phương trình (*) ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0;y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d).

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. 1. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị $(C): y=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{4}-x$, biết d song song đường thẳng $x+y-8=0$.

2. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2+5$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Giải

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Tiếp tuyến d song song với đường thẳng $x+y-8=0$ nên d có dạng $y=-x+b$.

d tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x_0^3}{3}+\frac{3x_0^2}{4}-x_0=-x_0+b \ (1) \\ x_0^2+\frac{3x_0}{2}-1=-1 \ (2) \end{cases}$$ có nghiệm x_0.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow 2x_0^2+3x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=-\frac{3}{2}$.

Với $x_0=0$ thay vào phương trình (1), ta được $b=0$ khi đó $d: y=-x$.

Với $x_0=-\frac{3}{2}$ thay vào phương trình (1), ta được $b=\frac{9}{16}$ khi đó $d: y=-x+\frac{9}{16}$.

2. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=6x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Leftrightarrow y_0=2x_0^3-3x_0^2+5$ và $y'(x_0)=6x_0^2-6x_0$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại M có dạng: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-(2x_0^3-3x_0^2+5)=(6x_0^2-6x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=(6x_0^2-6x_0)x-4x_0^3+3x_0^2+5$

$A\in\Delta\Leftrightarrow 4=(6x_0^2-6x_0).\frac{19}{12}-4x_0^3+3x_0^2+5\Leftrightarrow 8x_0^3-25x_0^2+19x_0-2=0\Leftrightarrow x_0=1$ hoặc $x_0=2$ hoặc $x_0=\frac{1}{8}$

Với $x_0=1\Rightarrow\Delta: y=4$;

Với $x_0=2\Rightarrow\Delta: y=12x-15$;

Với $x_0=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta: y=-\frac{21}{32}x+\frac{645}{128}$.

Ví dụ 2. 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

2. Cho hàm số: $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C) và điểm $A(0;m)$. Xác định m để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

Giải

1. Đường thẳng $x=0$ đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị (C).

d là đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ có hệ số góc k có phương trình $y=kx+\frac{3}{2}$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tai điểm có hoành độ là x_0 thì x_0 là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{1}{2}x_0^4-3x_0^2+\frac{3}{2}=kx_0+\frac{3}{2} & (1)\\ 2x_0^3-6x_0=k & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta được $x_0^2\left(x_0^2-2\right)=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm\sqrt{2}$

Khi $x_0=0$ thì $k=0$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$

Khi $x_0=-\sqrt{2}$ thì $k=2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Khi $x_0=\sqrt{2}$ thì $k=-2\sqrt{2}$ lúc đó phương trình tiếp tuyến là $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

Vậy có ba tiếp tuyến là $y=\frac{3}{2}$, $y=2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$, $y=-2\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$.

2. * Cách 1: Gọi điểm $\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<m\leq 1$. Tiếp tuyến Δ tại M của (C) có phương trình :

$$m\left(x_0-1\right)^2=3x_0+\left(x_0+2\right)\left(x_0-1\right)=0 \quad (\text{với } x_0\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow(m-1)x_0^2-2(m+2)x_0+m+2=0 \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm a,b khác 1 sao cho:

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(a-1)(b-1)}=\frac{ab+2(a+b)+4}{ab-(a+b)+1}<0 \text{ hay là: } \begin{cases}m\neq 1\\ m>-\frac{2}{3}\end{cases}.$$

Vậy $-\frac{2}{3}<m\neq 1$ là những giá trị cần tìm.

*** Cách 2:** Đường thẳng d đi qua A, hệ số góc k có phương trình: $y=kx+m$.

d tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases}\frac{x_0+2}{x_0-1}=kx_0+m\\ \frac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thế k vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$\frac{x_0+2}{x_0-1}=\frac{-3x}{\left(x_0-1\right)^2}+m\Leftrightarrow(m-1)x_0^2-2(m+2)x_0+m+2=0 \quad (*)$$

Để từ A kẻ được hai tiếp tuyến thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=3(m+2)>0\\ m\neq 1\\ m-1-2(m+2)+m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\ m\neq 1\end{cases} (i)$$

Khi đó tọa độ hai tiếp điểm là: $M_1\left(x_1;y_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm của $(*)$ và $y_1=\frac{x_1+2}{x_1-1}$; $y_2=\frac{x_2+2}{x_2-1}$

Để M₁, M₂ nằm về hai phía Ox thì $y_1.y_2<0\Leftrightarrow\frac{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}{x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1}<0 \quad (1)$

Áp dụng định lí Viet: $x_1+x_2=\frac{2(m+2)}{m-1}$; $x_1x_2=\frac{m+2}{m-1}$.

$$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\frac{9m+6}{-3}<0\Leftrightarrow m>-\frac{2}{3}.$$

Kết hợp với (i) ta được $-\frac{2}{3}<m\neq 1$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. 1. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $d:\ y=\frac{5x}{4}+\frac{61}{24}$ để từ đó kẻ đến đồ thị $y=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{3}$ có 3 tiếp tuyến tương ứng với 3 tiếp điểm có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn: $x_1<x_2<0<x_3$.

2. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C): $y=x^3+6x^2+9x+3$ phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của 2 tiếp tuyến đó với (C) cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho $OB=2012.OA$.

Giải

1. $M\left(m;\frac{5m}{4}+\frac{61}{24}\right)\in d$, tiếp tuyến (t) tại điểm $N(x_0;y_0)$ đi qua M:

$$\frac{2}{3}{x_0}^3+\left(\frac{1}{2}-m\right){x_0}^2-mx_0+\frac{3m}{4}-\frac{5}{24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\frac{1}{2}>0 \\ \frac{2}{3}{x_0}^2+\left(\frac{5}{6}-m\right)x_0+\frac{5}{12}-\frac{3m}{2}=0\ (*)\end{array}\right.$$

Theo bài toán, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt âm, tức là :

$$\begin{cases} m^2+\frac{7m}{3}-\frac{5}{12}>0 \\ \frac{5}{18}-m>0 \\ \frac{3}{2}m-\frac{5}{4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-\frac{5}{2};\ m>\frac{1}{6} \\ m<\frac{5}{18} \\ m<\frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy, những điểm M thỏa mãn bài toán là: $x_M<-\frac{5}{2}$ hoặc $\frac{1}{6}<x_M<\frac{5}{18}$.

2. Hoành độ tiếp điểm x_0 của tiếp tuyến dạng $y=kx+m$ với (C) là nghiệm của phương trình $f'(x_0)=k \Leftrightarrow 3x_0^2+12x_0+9-k=0$ (1)

Để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt nhau thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó $\Delta'=9+3k>0$ hay $k>-3$ (2).

Khi đó tọa độ tiếp điểm $(x_0;y_0)$ của 2 tiếp tuyến với (C) là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y_0=x_0^3+6x_0^2+9x_0+3 \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=\frac{1}{3}(x_0+2)\left(3x_0^2+12x_0+9\right)-2x_0-3 \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=\frac{1}{3}(x_0+2)k-2x_0-3=\frac{k-6}{3}x_0+\frac{2k-9}{3} \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm là (d): $y=\frac{k-6}{3}x+\frac{2k-9}{3}$.

Do (d) cắt trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OB=2012.OA$ nên có thể xảy ra:

- Nếu $A\equiv O$ thì $B\equiv O$, trường hợp này chỉ thỏa mãn nếu (d) cũng qua O. Khi đó $k=\frac{9}{2}$.
- Nếu $A\neq O$, khi đó trong tam giác AOB vuông tại O sao cho $\tan\widehat{OAB}=\frac{OB}{OA}=2012 \Rightarrow \frac{k-6}{3}=\pm 2012 \Rightarrow k=6042$ hoặc $k=-6030$ (không thỏa mãn (2)).

Vậy $k=\frac{9}{2}$, $k=6042$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$, có đồ thị là (C). Tìm tọa độ các điểm trên đường thẳng $y=-4$ mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị (C) đúng hai tiếp tuyến.

Giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Gọi A là điểm nằm trên đường thẳng $y=-4$ nên $A(a;-4)$.

Đường thẳng Δ qua A với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-a)-4$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} -x^3+3x-2=k(x-a)-4 \\ -3x^2+3=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x-2=3\left(x^2-1\right)(x-a) \\ -3x^2+3=k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left[2x^2-(3a+2)x+3a+2\right]=0 \quad (1) \\ -3x^2+3=k\ (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương với: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = 2x^2 - (3a+2)x + 3a + 2 = 0 \end{array}\right.$

Qua A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi (2) có 2 giá trị k khác nhau , khi đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, đồng thời thỏa mãn $k_1 = -3x_1^2 + 3,\ k_2 = -3x_2^2 + 3$ có 2 giá trị k khác nhau

* **Trường hợp 1:** g(x) phải thỏa mãn có một nghiệm bằng −1 và nghiệm khác −1 hay $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ -\dfrac{3a+2}{2} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 6 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$ kiểm tra (2) thấy thỏa mãn.

* **Trường hợp 2:** g(x) phải thỏa mãn có một nghiệm kép khác −1

hay $\begin{cases} (3a+2)^2 - 8(3a+2) = 0 \\ \dfrac{3a+2}{2} \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3a+2)(a-2) = 0 \\ 3a + 2 \neq -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}$ hoặc $a = 2$, kiểm tra (2) thấy thỏa mãn.

Vậy, các điểm cần tìm là $A(-1;-4)$, $A(2;-4)$ hoặc $A\left(-\dfrac{2}{3};-4\right)$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = 3x - x^3$ có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng (d): $y = -x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

Giải

Gọi $M(m;-m) \in d$.

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có dạng: $y = k(x-m) - m$.

Δ là tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau có nghiệm x_0 :

$$\begin{cases} 3x_0 - x_0^3 = k(x_0 - m) - m \ (1) \\ 3 - 3x_0^2 = k \qquad (2) \end{cases} \quad (*)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $2x_0^3 - 3mx_0^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2x_0^3}{3x_0^2 - 4}$ (**)

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) ⇔(*) có nghiệm x_0 đồng thời (2) tồn tại đúng 2 giá trị k khác nhau

Khi đó (**) có nghiệm x_0 phân biệt thỏa mãn (2) có 2 giá trị k khác nhau .

Xét hàm số $f(x_0) = \dfrac{2x_0^3}{3x_0^2 - 4}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm 1; \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

Ta có: $f'(x_0) = \dfrac{6x_0^4 - 24x_0^2}{(3x_0^2 - 4)^2}$ và $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \pm 2$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra ⇔ $m = \pm 2$. Kiểm tra (2) , ta thấy thỏa mãn.
Vậy: $M(-2;2)$ hoặc $M(2;-2)$.

Ví dụ 6. Lấy điểm M thuộc đồ thị $(C): y = -2x^3 - 3x^2 + 3$. Chứng minh rằng có nhiều nhất hai đường thẳng đi qua điểm M và tiếp xúc với (C).

Giải

Gọi $M\left(a; -2a^3 - 3a^2 + 3\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số. Đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k , có phương trình:

$$y = k(x-a) - 2a^3 - 3a^2 + 3.$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0;y_0)$ khi hệ phương trình: $\begin{cases} -2x_0^3 - 3x_0^2 + 3 = k(x_0 - a) - 2a^3 - 3a^2 + 3 \ (1) \\ -6x_0^2 - 6x_0 = k \qquad (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1), biến đổi và rút gọn ta được phương trình :

$$(x_0 - a)^2 (4x_0 + 2a + 3) = 0 \text{ tức } x_0 = a \text{ hoặc } x_0 = \frac{-2a - 3}{4}.$$

Vậy hệ phương trình (1), (2) có nhiều nhất 2 nghiệm, tức có nhiều nhất 2 đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với đồ thị (C).

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = -2x^3 + 4x^2 + 1$, có đồ thị là (C):

1. Gọi d là đường thẳng đi qua A(0;1) có hệ số góc là k . Tìm k để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B,C khác A sao cho B nằm giữa A và C đồng thời AC = 3AB ;
2. Tìm trên trục tung những điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến (C)

Giải

1. $d: y = kx + 1$. Với $k < 2$ thì (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt B và C khác A . Khi đó $B(x_B; kx_B + 1)$, $C(x_C; kx_C + 1)$, $x_B < x_C$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình $2x^2 - 4x + k = 0$.

AC = 3AB tức $x_C = 3x_B$ và $x_B + x_C = 2,\ x_B.x_C = \dfrac{k}{2}$ suy ra $k = \dfrac{3}{2}$.

2. Gọi $M(0;m)$ và (t) qua M có hệ số góc là a nên (t): $y=ax+m$.

(t) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}-2x_0^3+4x_0^2+1=kx_0+m\\ -6x_0^2+8x_0=x_0\end{cases}$

có nghiệm x_0 suy ra $4x_0^3-4x_0^2+1-m=0$ có nghiệm x_0 $(*)$.

Theo bài toán thì phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm, từ đó có được

$m=\dfrac{11}{27}$ hoặc $m=1$.

III. CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ có đồ thị là (C). Tìm phương trình các đường thẳng đi qua điểm $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số.

Giải

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A với hệ số góc k có dạng: $y=k\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3}$

Δ tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x=k\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3} & (1)\\ x^2-4x+3=k & (2)\end{cases}\text{ có nghiệm } x$$

Thế (2) vào (1), được: $\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x=(x^2-4x+3)\left(x-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{3}\Leftrightarrow x(3x^2-11x+8)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\overset{(2)}{\Rightarrow}k=3\Rightarrow\Delta:y=3x\\ x=1\overset{(2)}{\Rightarrow}k=0\Rightarrow\Delta:y=\frac{4}{3}\\ x=\frac{8}{3}\overset{(2)}{\Rightarrow}k=-\frac{5}{9}\Rightarrow\Delta:y=-\frac{5}{9}x+\frac{128}{81}\end{array}\right.$$

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

1. $y=-x^4+4x^2-3$ đi qua điểm cực tiểu của đồ thị.
2. $y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9};-2\right)$.
3. $y=x^3-2x^2+x+4$ đi qua điểm $M(-4;-24)$.

Giải

1. Điểm cực tiểu của (C) là $A(0;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) có dạng : $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

(trong đó x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

$y=(-4x_0^3+8x_0)(x-x_0)-x_0^4+4x_0^2-3 \;=(-4x_0^3+8x_0)x+3x_0^4-4x_0^2-3$

$A(0;-3)\in d\Leftrightarrow -3=3x_0^4-4x_0^2-3\Leftrightarrow 3x_0^4-4x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Với $x_0=0$ thì phương trình d: $y=-3$

Với $x_0=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Với $x_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$ thì phương trình d: $y=\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y=-3$, $y=-\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$, $y=\frac{16}{3\sqrt{3}}x-\frac{59}{9}$.

2. Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại M_0 là:

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\left(x_0^3-3x_0^2+2\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)$$

Do (d) đi qua điểm $A\left(\frac{23}{9};-2\right)$ nên :

$-2-\left(x_0^3-3x_0^2+2\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(\frac{23}{9}-x_0\right)\Leftrightarrow 6x_0^3-32x_0^2+46x_0-12=0$

$$\Leftrightarrow(x_0-2)\left(3x_0^2-10x_0+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y=-2\\ x_0=3\Rightarrow y=9x-25\\ x_0=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{5}{3}x+\frac{61}{27}\end{array}\right.$$

3. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=\left(3x_0^2-4x_0+1\right)(x-x_0)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$$

Vì (Δ) đi qua điểm $M(-4;-24)$ nên: $-24=\left(3x_0^2-4x_0+1\right)(-4-x_0)+x_0^3-2x_0^2+x_0+4$

$\Leftrightarrow x_0^3+5x_0^2-8x_0-12=0\Leftrightarrow x_0=-6$ hoặc $x_0=-1$ hoặc $x_0=2$.

– Với $x_0=-6$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=133x+508$

– Với $x_0=-1$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=8x+8$

– Với $x_0=2$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=5x-4$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=133x+508$; $y=8x+8$; $y=5x-4$.

Bài 3. 1. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C): $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, biết d đi qua điểm $A(-6;5)$.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+11$ có đồ thị là (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua điểm $I\left(\dfrac{29}{3};184\right)$.

Giải

1. * Cách 1: Gọi $(x_0;y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với $y(x_0)=\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}$, $x_0\neq 2$ và d có phương trình: $y=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$

d đi qua điểm $A(-6;5)$ nên có $5=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$ phương trình này tương đương với $x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=6$

Với $x_0=0$, ta có phương trình: $y=-x-1$;

Với $x_0=6$, ta có phương trình: $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$;

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

* Cách 2: Phương trình d đi qua $A(-6;5)$ có hệ số góc k, khi đó d có phương trình là : $y=k(x+6)+5$

d tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ :

$$\begin{cases}k(x_0+6)+5=\dfrac{x_0+2}{x_0-2}\\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2}\end{cases}\text{ có nghiệm } x_0 \text{ hay } \begin{cases}4x_0^2-24x_0=0\\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2}\end{cases}\text{ có nghiệm } x_0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0,\ k=-1\Rightarrow d: y=-x-1\\ x_0=6,\ k=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow d: y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

2. Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=\left(3x_0^2-6x_0-9\right)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$$

Vì (Δ) đi qua điểm $I\left(\dfrac{29}{3};184\right)$ nên: $184=\left(3x_0^2-6x_0-9\right)\left(\dfrac{29}{3}-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+11$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-32x_0^2+58x_0+260=0\Leftrightarrow x_0=13$ hoặc $x_0=5$ hoặc $x_0=-2$.

– Với $x_0=13$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=420x-3876$

– Với $x_0=5$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=36x-164$

– Với $x_0=-2$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=15x+39$

Vậy, có ba phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y=420x-3876$; $y=36x-164$; $y=15x+39$.

Bài 4. Cho hàm số $y=(2-x)^2x^2$, có đồ thị (C):

1. Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với Parabol $y=x^2$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(2;0)$.

Giải

Ta có: $y=x^4-4x^3+4x^2\Rightarrow y'=4x^3-12x^2+8x$

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Parabol $y=x^2$.

$x^4-4x^3+4x^2=x^2\Leftrightarrow x^2(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow x=0, x=1, x=3$.

- $x=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=0$.
- $x=1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=1$
- $x=3$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y=24x-63$.

2. * **Cách 1:** Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình: $y=(4x_0^3-12x_0^2+8x_0)(x-x_0)+y_0$.

$A\in\Delta\Leftrightarrow 0=(4x_0^3-12x_0^2+8x_0)(2-x_0)+x_0^2(x_0-2)^2$

$\Leftrightarrow(2-x_0)(3x_0^3-10x_0^2+8x_0)=0\Leftrightarrow x_0=0,x_0=2,x_0=\frac{4}{3}$.

- $x_0=0\Rightarrow y'(x_0)=0,y_0=0\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$
- $x_0=2\Rightarrow y'(x_0)=0,y_0=0\Rightarrow$ Phượng trình tiếp tuyến $y=0$
- $x=\frac{4}{3}\Rightarrow y'(x_0)=-\frac{32}{27},y_0=\frac{64}{81}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{32}{27}x+\frac{64}{27}$.

* **Cách 2:** Gọi d là đường thẳng đi qua A, có hệ số góc $k\Rightarrow d: y=k(x-2)$

d tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases}(2-x_0)^2{x_0}^2=k(x_0-2)\\4x_0(x_0-2)(x_0-1)=k\end{cases}$

có nghiệm x_0.

Thay k vào phương trình thứ nhất ta được:

$x_0^4-4x_0^3+4x_0^2=(x_0-2)(4x_0^3-12x_0^2+8x_0)\Leftrightarrow x_0(3x_0-4)(x_0-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x_0=0,x_0=2,x_0=\frac{4}{3}$.

- $x_0=0\Rightarrow k=0\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$
- $x_0=2\Rightarrow k=0\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=0$
- $x_0=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{32}{27}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y=-\frac{32}{27}x+\frac{64}{27}$.

Bài 5. 1. Tìm m để (Cm): $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1$ tiếp xúc với đường thẳng $y=1$.

2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x-2}{2x-1}$. (0;m) là một điểm thuộc trục Oy, $m\le0$. Chứng minh rằng luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và tiếp điểm của tiếp tuyến này với (C) có hoành độ dương.

Giải

1. (Cm) tiếp xúc đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau

$\begin{cases}\frac{x_0^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x_0^2+2mx_0+1=1 \ (a)\\x_0^2-(m+2)x_0+2m=0 \ (b)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

(b) $\Leftrightarrow x_0=2\vee x_0=m$.

Thay $x_0=2$ vào (a) ta được $m=\frac{2}{3}$.

Thay $x_0=m$ vào (a) ta được $-\frac{m^3}{6}+m^2=0\Leftrightarrow m=0\vee m=6$.

Vậy (Cm) tiếp xúc đường thẳng $y=1\Leftrightarrow m\in\left\{0;\frac{2}{3};6\right\}$.

2. Phương trình của đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k : $y=kx+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ sau $\begin{cases}\frac{x_0-2}{2x_0-1}=kx_0+m \ (1)\\\frac{3}{(2x_0-1)^2}=k \ (2)\end{cases}$

có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được : $\frac{x_0-2}{2x_0-1}=\frac{3x_0}{(2x_0-1)^2}+m$

$\Leftrightarrow(x_0-2)(2x_0-1)=3x+m(2x_0-1)^2$ (3) (do $x_0=\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm của (3)) $\Leftrightarrow(4m-2)x_0^2-4(m-2)x_0+m-2=0$ (4)

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (4) có ít nhất một nghiệm dương với mọi $m\le0$. Vì $m\le0$ nên $4m-2<0$ suy ra (4) có nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta'=4(m-2)^2-(4m-2)(m-2)\ge0\Leftrightarrow m-2\le0$. Bất đẳng thức này đúng với mọi $m\le0$.

Khi đó gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (4).

Ta có $\forall m\le0$, $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4(m-2)}{4m-2}>0\\x_1x_2=\frac{m-2}{4m-2}>0\end{cases}$, suy ra $x_1>0,x_2>0$

Vậy với mọi $m\le0$ luôn tồn tại ít nhất một tiếp tuyến của (C) đi qua M và hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với (C) là số dương.

Bài 6. 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m).

Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m). tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $(d): x+2y-3=0$.

2. Cho hàm số: $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Cho điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

3. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

Giải

1. (d) có hệ số góc $-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc $k=2$. Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì: $y'=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+(4-3m)=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ $(*)$

Theo bài toán, phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm âm.

Nếu $m=0$ thì $(*) \Leftrightarrow -2x=-2 \Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $m\neq 0$ thì dễ thấy phương trình $(*)$ có 2 nghiệm là $x=1$ hay $x=\dfrac{2-3m}{m}$

Do đó để $(*)$ có một nghiệm âm thì $\dfrac{2-3m}{m}<0 \Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>\dfrac{2}{3}$.

2. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0;a)$ và có hệ số góc k: $y=kx+a$

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ: $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ k=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\end{cases}$ có nghiệm x

$\Rightarrow (1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)=0$ (1) có nghiệm $x\neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ \Delta'=3a+6>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ a>-2\end{cases}$ (2)

Khi đó ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2(a+2)}{a-1}, x_1x_2=\dfrac{a+2}{a-1}$ và $y_1=1+\dfrac{3}{x_1-1}, y_2=1+\dfrac{3}{x_2-1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì: $y_1.y_2<0$

$\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{3}{x_1-1}\right).\left(1+\dfrac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}<0$

$\Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu với điều kiện (2) ta được: $-\dfrac{2}{3}<a\neq 1$.

3. Phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(0;m)$ và có hệ số góc k: $y=kx+m$

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x khi hệ: $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=kx+m\\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ có nghiệm x

$\Rightarrow (m-1)x^2-2(m+1)x+m+1=0$ (1) có nghiệm $x\neq 1$.

Để qua M có 1 tiếp tuyến thì (1) phải có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m\neq 1\\ \Delta'=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}, m=1 \Rightarrow k=-8$ hoặc $x=0, m=-1 \Rightarrow k=-2$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\dfrac{2x^3}{3}+x^2+4x-2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(2; 9).
3. Gọi M, N là hai điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 ($x_1\neq x_2$), tìm hệ thức giữa x_1, x_2 sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M,N song song với nhau, khi đó chứng minh rằng đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định.

Giải

1. Gọi (d) là tiếp tuyến cần tìm và x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C) thì hệ số góc của (d): $k=y'(x_0)=-2x_0^2+2x_0+4=\dfrac{9}{2}-\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{9}{2}$, $k=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max k=\dfrac{9}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến (d) : $y=\dfrac{9}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}x-\dfrac{25}{12}$.

2. Phương trình đường thẳng (D) đi qua điểm A(2; 9) có hệ số góc k là:

$$y=k(x-2)+9.$$

(D) tiếp xúc với (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi:

Hệ phương trình: $\begin{cases}-\dfrac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=k(x_0-2)+9 \quad (1)\\ -2x_0^2+2x_0+4=k \quad (2)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (2) vào (1) ta được : $-\dfrac{2x_0^3}{3}+x_0^2+4x_0-2=(-2x_0^2+2x_0+4)(x_0-2)+9$

$$\Leftrightarrow 4x_0^3-15x_0^2+12x_0-9=0 \Leftrightarrow x_0=3$$

Thay $x_0 = 3$ vào (2) ta được $k = -8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến (D) là $y = -8x + 25$.

3. $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ với $y_1 = -\frac{2x_1^3}{3} + x_1^2 + 4x_1 - 2$, $y_2 = -\frac{2x_2^3}{3} + x_2^2 + 4x_2 - 2$.

$$y_1 + y_2 = -\frac{2}{3}(x_1^3 + x_2^3) + x_1^2 + x_2^2 + 4(x_1 + x_2) - 4$$

$$= -\frac{2}{3}[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)] + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 4 - 4$$

$$= -\frac{2}{3}(1 - 3x_1x_2) + 1 - 2x_1x_2 = \frac{1}{3}$$

Gọi I là trung điểm của M_1M_2 thì: $\begin{cases} x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$

Vậy đường thẳng M_1M_2 đi qua điểm cố định $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)$ chính là điểm uốn của đồ thị (C).

Bài 8. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{2 - x}$:

1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + 1$.

2. Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Giải

1. Tiếp tuyến (d) của (C) vuông góc đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + 1$ suy ra phương trình (d) có dạng : $y = -\frac{3}{4}x + m$. (d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0

khi hệ $\begin{cases} \frac{x_0^2}{2 - x_0} = -\frac{3}{4}x_0 + m \\ \frac{-x_0^2 + 4x_0}{(2 - x_0)^2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\Rightarrow \frac{-x_0^2 + 4x_0}{(2 - x_0)^2} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x_0 = 6 \vee x_0 = -2 \Rightarrow (d): y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{2},\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

2. $\begin{cases} M \in (C) \\ d(M,Ox) = 2d(M,Oy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \\ |y_M| = 2|x_M| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \\ y_M = \pm 2x_M \end{cases}$.

$$(*)\begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \\ y_M = 2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 2x_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 3x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0,\ y_M = 0 \\ x_M = \frac{4}{3},\ y_M = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vì M không trùng với gốc tọa độ O nên chỉ nhận $M\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 8x - 8$.

$$(*)\begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \\ y_M = -2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ -2x_M = \frac{x_M^2}{2 - x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = -8 \end{cases} \text{(do } M \neq O\text{)}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -8$.

Bài 9. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + mx + m + 1$ và (d) là tiếp tuyến của (Cm) tại điểm có hoành độ x = - 1. Tìm m để (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{8}{3}$.

Giải

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m + 1)x + m$, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) là:

$y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) = (12 + 7m)(x + 1) - 3m - 4 \Leftrightarrow y = (12 + 7m)x + 4m + 8$

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (d) với trục Ox và Oy thì:

$$P\left(-\frac{4m + 8}{12 + 7m};0\right), Q(0; 4m+8).$$

Diện tích OPQ: $S = \frac{1}{2}OP.OQ = \frac{1}{2}\left|-\frac{4m + 8}{12 + 7m}\right||4m + 8| = \frac{|8m^2 + 32 + 32m|}{|12 + 7m|}$

$S = \frac{8}{3} \Leftrightarrow |8m^2 + 32m + 32| = \frac{8}{3}|12 + 7m|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 + 32m + 32 = \frac{8}{3}(12 + 7m) \\ 8m^2 + 32m + 32 = -\frac{8}{3}(12 + 7m) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + \frac{5}{3}m = 0 \\ 3m^2 + 19m + 24 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \vee m = -\frac{5}{3} \\ m = \frac{-19 \pm \sqrt{73}}{6} \end{array}\right..$$

Bài 10. 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ tiếp xúc với Parabol $y=x^2+m$.

2. Tìm m để đồ thị hai hàm số sau tiếp xúc với nhau:

$(C_1): y=mx^3+(1-2m)x^2+2mx$ và $(C_2): y=3mx^3+3(1-2m)x+4m-2$.

3. Tìm tham số m để đồ thị (Cm) của hàm số $y=x^3-4mx^2+7mx-3m$ tiếp xúc với parabol $(P): y=x^2-x+1$.

Giải

1. Hai đường cong đã cho tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=x_0^2+m & (1) \\ \dfrac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=2x_0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x_0(2x_0^2-5x_0+4)=0 \Leftrightarrow x=0$ thay vào (1) ta được $m=-1$.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

2. (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm x_0: $\begin{cases} mx_0^3+(1-2m)x_0^2+2mx_0=3mx_0^3+3(1-2m)x_0+4m-2 \\ 3mx_0^2+2(1-2m)x_0+2m=9mx_0^2+3(1-2m) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx_0^3-(1-2m)x_0^2+(3-8m)x_0+4m-2=0 & (1) \\ 6mx_0^2-2(1-2m)x_0+3-8m=0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x_0-1)(2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ 2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0 \end{array} \right.$$

- Với $x_0=1$ thay vào (2), ta có: $m=\frac{1}{2}$.
- Với $2mx_0^2-(1-4m)x_0-4m+2=0$ (*) ta có :

$(2) \Leftrightarrow 4mx_0^2-x_0+1-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=\dfrac{1-4m}{4m} \end{array} \right.$ ($m \neq 0$ vì $m=0$ hệ vô nghiệm)

Thay $x_0=\frac{1-4m}{4m}$ vào (*) ta được:

$$\frac{(1-4m)^2}{8m}-\frac{(1-4m)^2}{4m}+2-4m=0 \Leftrightarrow 48m^2-24m+1=0 \Leftrightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{12}.$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$, $m=\frac{3\pm\sqrt{6}}{12}$ là những giá trị cần tìm.

3. (Cm) tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ x_0 khi:

hệ $\begin{cases} x_0^3-4mx_0^2+7mx_0-3m=x_0^2-x_0+1 & (1) \\ 3x_0^2-8mx_0+7m=2x_0-1 \end{cases}$ (A) có nghiệm x_0.

Giải hệ (A), $(1) \Leftrightarrow x_0^3-(4m+1)x_0^2+(7m+1)x_0-3m-1=0$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2-4mx_0+3m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0^2-4mx_0+3m+1=0 \end{array} \right.$$

Vậy (A) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 \; (2) \end{cases}$ và $\begin{cases} x_0^2-4mx_0+3m+1=0 \\ 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 \; (2) \end{cases}$

Thay $x_0=1$ vào (2) ta được $m=2$.

Hệ $\begin{cases} 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 & (2) \\ x_0^2-4mx_0+3m+1=0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2-2(4m+1)x_0+7m+1=0 & (2) \\ 3x_0^2-12mx_0+9m+3=0 & (4) \end{cases}$

Trừ hai phương trình (2) và (4), vế với vế ta được:

$$4mx_0-2x_0-2m-2=0 \Leftrightarrow (2m-1)x_0=m+1 \quad (5).$$

Khi $m=\frac{1}{2}$ thì (5) trở thành $0=3/2$ (sai) do đó $(5) \Leftrightarrow x_0=\frac{m+1}{2m-1}$.

Thay $x_0=\frac{m+1}{2m-1}$ vào phương trình (3), ta được:

$$\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2-4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)+3m+1=0 \Leftrightarrow 4m^3-11m^2+5m+2=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{1}{4} \\ m=1 \end{array} \right..$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2; -\frac{1}{4}; 1\right\}$.

Bài 11. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x}{1-x}$ (1):

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) biết (d) cắt trục tung tại điểm A sao cho $OA=\frac{9}{2}$.
3. Cho hai điểm M(1; 0), N(0; 3):
   a) Chứng tỏ rằng đường thẳng MN và (C) không có điểm chung.
   b) Viết phương trình tiếp tuyến (D) của (C) song song với đường thẳng MN và tìm E trên (C) sao cho tam giác EMN có diện tích nhỏ nhất.

Giải

1. $\begin{cases}A\in Oy\\ OA=\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\left(0;\frac{9}{2}\right)\\ A\left(0;-\frac{9}{2}\right)\end{array}\right.$.

***Trường hợp 1:** $A\left(0;\frac{9}{2}\right)$, khi đó phương trình tiếp tuyến (d) có dạng $y=kx+\frac{9}{2}$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=kx_0+\frac{9}{2}\ \ (2)\\ \frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=k\ \ (3)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (3) vào (2) ta được: $\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}x_0+\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ 2(x_0^2-3x_0)(1-x_0)=-2x_0^3+4x_0^2-6x_0+9(1-x_0)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ 5x_0^2-18x_0+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\ x_0=\frac{3}{5}\end{array}\right..$$

Thay $x_0=3$ vào (3) ta được $k=-\frac{3}{2}$.

Thay $x_0=\frac{3}{5}$ vào (3) ta được $k=-\frac{27}{2}$.

Vậy trong trường hợp này, phương trình của (d) là: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}, y=-\frac{27}{2}x+\frac{9}{2}$.

*** Trường hợp 2:** $A\left(0;-\frac{9}{2}\right)$, khi đó phương trình (d) có dạng : $y=kx-\frac{9}{2}$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=kx_0-\frac{9}{2}\ \ (4)\\ \frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=k\ \ (5)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Thay (5) vào (4), ta được:

$$\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}x_0-\frac{9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ 2(x_0^2-3x_0)(1-x_0)=-2x_0^3+4x_0^2-6x_0-9(1-x_0)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ 13x_0^2+18x_0+9=0\ \text{(vô nghiệm)}\end{cases}$$

Do đó trong trường hợp này không có tiếp tuyến (d) thỏa mãn đề.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) cần tìm là: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2},\ y=-\frac{27}{2}x+\frac{9}{2}$.

3a. Phương trình đường thẳng MN: $\frac{y-y_M}{y_M-y_N}=\frac{x-x_M}{x_M-x_N}\Leftrightarrow y=-3x+3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng MN.

$$\frac{x^2-3x}{1-x}=-3x+3\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x+3=0\ \text{(vn)}\\ x\neq 1\end{cases}$$

Suy ra đường thẳng MN và (C) không có điểm chung.

b. Tiếp tuyến (D) song song đường thẳng MN suy ra phương trình (D) có dạng:

$$y=-3x+m\ (m\neq 3).$$

(D) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_0^2-3x_0}{1-x_0}=-3x_0+m\ (6)\\ \frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=-3\ (7)\end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\Rightarrow\frac{-x_0^2+2x_0-3}{(1-x_0)^2}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ -x_0^2+2x_0-3=-3(1+x_0^2-2x_0)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 1\\ 2x_0^2-4x_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=2\end{array}\right..$$

Thay $x_0=0$ vào (6) ta được m = 0. Thay $x_0=2$ vào (6) ta được m = 8.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-3x,\ y=-3x+8$.

Khi m = 0 thì tiếp điểm của tiếp tuyến (D) với (C) là O(0; 0).

Khi m = 8 thì tiếp điểm của tiếp tuyến (D) với (C) là K(2; 2).

Vì đường thẳng MN và (C) không có điểm chung và

$d(O, MN) = \frac{3}{\sqrt{10}} < d(K, MN) = \frac{5}{\sqrt{10}}$ do đó điểm thuộc (C) có khoảng cách từ đó đến đường thẳng MN là O .

Mặt khác $S_{EMN} = \frac{1}{2}MN.d(E, MN)$, độ dài MN không đổi, do đó:

S_{EMN} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ d(E,MN) nhỏ nhất $\Leftrightarrow E \equiv O$.

Vậy điểm cần tìm là gốc tọa độ O.

Bài 12. Tìm tất cả các điểm trên Oy sao cho từ đó ta có thể vẽ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

Giải

Xét $M(0; m) \in Oy$. Đường thẳng d đi qua M, hệ số góc k có phương trình: $y = kx + m$.

d là tiếp xúc đồ thị tại điểm có hoành đồ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases} x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} = kx_0 + m \\ 1 + \dfrac{4x_0 + 1}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} = k \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0.$$

Thay k vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} = x_0 + \frac{4x_0^2 + x_0}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} + m$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2 + 2x_0 + 1 = 4x_0^2 + x_0 + m\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1}} = f(x_0) \ (*)$$

Để từ M kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến đồ thị $\Leftrightarrow$ (*) có ít nhất một nghiệm.

Xét hàm số $f(x_0)$, ta có: $f'(x_0) = \frac{-3x_0}{(\sqrt{4x_0^2 + 2x_0 + 1})^3} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Mặt khác: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_0) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x_0) = -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x_0	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x_0)$		+	0	–	
$f(x_0)$			1		
	$-\frac{1}{2}$	↗		↘	$\frac{1}{2}$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 1$. Vậy M(0; m) với $-\frac{1}{2} < m \le 1$ là những điểm cần tìm.

Bài 13. Cho hàm số: $y = -4x^3 + 3x + 2$, có đồ thị là (C).

1. Tìm a để phương trình $4x^3 - 3x + 2a^2 - 3a = 0$ có hai nghiệm âm và một nghiệm dương;

2. Tìm những điểm trên đường thẳng $y = 3$ để từ đó có thể vẽ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị (C).

Giải

1. Phương trình: $4x^3 - 3x + 2a^2 - 3a = 0$ tương đương với phương trình: $-4x^3 + 3x + 2 = 2a^2 - 3a + 2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm âm và một nghiệm dương khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2a^2 - 3a + 2$ cắt đồ thị $y = -4x^3 + 3x + 2$ tại ba điểm trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương. Từ đồ thị suy ra: $1 < 2a^2 - 3a + 2 < 2$ tức ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 < 2a^2 - 3a + 1 \\ 2a^2 - 3a < 0 \end{cases} \text{ hay } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ hoặc } 1 < a < \frac{3}{2}.$$

2. Giả sử $M(m; 3)$ là điểm cần tìm và d là đường thẳng qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng: $y = k(x - m) + 3$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm $N(x_0; y_0)$ khi hệ :

$$\begin{cases} -4x_0^3 + 3x_0 + 2 = k(x_0 - m) + 3 \\ (-4x_0^3 + 3x_0 + 2)' = \left[k(x_0 - m) + 3\right]' \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0, \text{ từ hệ suy ra:}$$

$(2x_0 - 1)\left[4x_0^2 - 2(3m - 1)x_0 - 3m + 1\right] = 0 \ (1)$ có nghiệm x_0.

Qua M kẻ được 3 đường thẳng tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm x_0, tức phương trình $4x_0^2-2(3m-1)x_0-3m+1=0$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$ hay $m<-1$ hoặc $\frac{1}{3}<m\neq\frac{1}{2}$.

Bài 14.1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số (C_m): $y=\frac{x^2-x+m}{x-1}$ với $m\neq 0$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến tại 2 điểm A, B vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y=\frac{2x^2}{x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đường thẳng $y=x$ những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C), đồng thời 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Giải

1. Hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B có hệ số góc là $k=\frac{2x+1}{x+1}$.

Ta có: $y'=\frac{x^2+2x-m-1}{(x+1)^2}$, đặt $g(x)=x^2+2x-m-1$.

Theo bài toán, $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Theo đề, tiếp tuyến tại A và B vuông góc nhau tức $k_A.k_B=-1$, tìm được $m=-\frac{1}{5}$.

2. Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(m;m)$ có hệ số góc là k, phương trình có dạng: $y=k(x-m)+m$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ : $\begin{cases}\dfrac{2x_0^2}{x_0+2}=k(x_0-m)+m\\ \dfrac{2x_0^2+8x_0}{(x_0+2)^2}=k\end{cases}$

có nghiệm x_0, từ đây ta tìm được $m=-5\pm\sqrt{23}$.

Mục Lục

Lời nói đầu 2

Chủ đề 1: Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác 3

Chương 1: Hàm số lượng giác 3

Chương 2: Phương trình lượng giác 23

Chủ đề 2: Tổ hợp – Xác suất 79

Chương 1: Tổ hợp 79

Chương 2: Biến cố – Xác xuất của biến cố 145

Chủ đề 3: Dãy số – Cấp số cộng và cấp số nhân 173

Chương 1: Phương pháp quy nạp toán học 173

Chương 2: Dãy số 188

Chương 3: Cấp số cộng – Cấp số nhân 204

Chủ đề 4: Giới hạn 226

Chương 1: Giới hạn dãy số 226

Chương 2: Giới hạn hàm số 248

Chương 3: Hàm số liên tục 279

Chủ đề 5: Đạo hàm 296

Chương 1: Khái niệm đạo hàm 296

Chương 2: Các quy tắc tính đạo hàm 301

Chương 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số 320

HÀNG VIỆT NAM CHẤT LƯỢNG CAO
Nhà sách KHANG VIỆT
http://www.nhasachkhangviet.vn

QUẢNG LỢI
VIỆT VĂN
FAHASA
HÀNG VIỆT NAM CHẤT LƯỢNG CAO

CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN DVVH KHANG VIỆT

Nhà sách KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đakao - Quận 1 - Tp.Hồ Chí Minh
Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: (08) 39110880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

8 935092 524238
Gía: **89.000đ**